

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной электродинамики
Российской академии наук

На правах рукописи



Рожков Александр Владимирович

Низкоразмерные и анизотропные многочастичные фермионные системы

01.04.07 – Физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Плакида Николай Максимилианович, доктор физико-математических наук, профессор, Объединенный институт ядерных исследований, главный научный сотрудник

Кашурников Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», профессор

Рубцов Алексей Николаевич, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор

Ведущая организация:

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова НИЦ КИ

Защита состоится «_____» _____ 2015 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 002.097.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте физики высоких давлений им. Л.Ф. Верещагина Российской академии наук по адресу: 142190, г. Москва, г.Троицк, Калужское шоссе, стр. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФВД РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2015 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.097.01,

кандидат физико-математических наук

Подпись

Т.В. Валянская

Общая характеристика работы

Актуальность работы В настоящей диссертации исследуется поведение многочастичных анизотропных и низкоразмерных фермионных систем. Изучение низкоразмерных систем – сравнительно молодая, но бурно развивающаяся область физики конденсированного состояния. Интерес к ней связан с двумя факторами. Во-первых, успехи в химическом синтезе и манипуляции мезоскопическими объектами привели к возникновению новых веществ и систем с необычными свойствами. Существует целый ряд искусственно созданных низкоразмерных материалов. Таковым, например, является графен и системы на его основе. В научном сообществе активно изучается вопрос о применимости графена для электроники, что, в свою очередь, ставит вопрос о выяснении транспортных, оптических и магнитных свойств графеновых систем.

Другой пример нового класса веществ – топологические диэлектрики. Такие материалы являются зонными изоляторами, однако, на их поверхности непременно существует зона поверхностных состояний, описываемая двумерным гамильтонианом Дирака-Вейля. В литературе обсуждается использование такой двумерной системы для топологических квантовых вычислений.

Стоит также упомянуть квазиодномерные и квазидвумерные системы на основе атомов, захваченных анизотропной оптической ловушкой. Эти системы примечательны тем, что их микроскопические параметры могут регулироваться экспериментатором. В частности, эффективное взаимодействие между атомами может варьироваться контролируемым образом в широких пределах и даже менять знак.

Второй фактор, обуславливающий активный интерес к физике в низких размерностях связан с тем, что, по сравнению с трехмерной системой, взаимодействие в низкоразмерной системе гораздо сильнее влияет на ее по-

ведение, приводя к необычным корреляционным эффектам. Многие такие эффекты не изучены до конца и являются предметом активного теоретического и экспериментального внимания. В частности, существенный фундаментальный и прикладной интерес представляют поиски высокотемпературных нефононных механизмов сверхпроводимости, основанных на нетривиальных корреляционных эффектах. Действительно, многие сверхпроводники с высокой критической температурой являются квазидвумерными. Сверхпроводники на основе органических молекул являются квазиодномерными или квазидвумерными (хотя имеют достаточно малую критическую температуру). Это указывает на то, что многочастичные корреляции при определенных ситуациях могут усиливать тенденцию к сверхпроводящему упорядочению в анизотропной (квазиодномерной или квазидвумерной) ферми-системе.

Наконец, внутри самого научного сообщества постоянно растет уровень требований, предъявляемый к исследуемым теоретическим моделям, обоснованности и строгости используемых методов. Так, хотя наиболее простые одномерные модели были решены уже полвека назад, исследование более общих систем не прекращается и до сих пор, требуя разработки новых подходов.

Все вышеперечисленное позволяет утверждать, что тему диссертации можно считать актуальной.

Цель диссертационной работы состоит в теоретическом исследовании фермионных систем пониженной размерности, таких как одномерные и квазиодномерные проводники, двумерный легированный моттовский изолятор и графен, а также в разработке новых теоретических методов исследования многочастичных систем в пониженных размерностях.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

- 1) Разработан метод исследования модели Томонаги-Латтинжера с нелинейной дисперсией фермионного спектра, основанный на отображении га-

мильтониана Томонаги-Латтинжера на гамильтониан невзаимодействующих квазичастиц. Данный метод был использован для расчета коэффициента кулоновского увлечения в системе двух одномерных параллельных квантовых проволок.

- 2) Изучено влияние несущественного (в смысле ренормгруппы) взаимодействия на основное состояние и возбуждения свободных одномерных фермионов.
- 3) Исследованы нефононные механизмы сверхпроводимости и фазовая диаграмма для квазиодномерных проводников.
- 4) С помощью теории возмущений Бриллюэна-Вигнера для модели Хаббарда была разработана схема вычисления низкоэнергетического эффективного гамильтониана, обобщающего t - J модель; изучена связь с другими методами вывода эффективного гамильтониана.
- 5) Изучена надежность приближения Хаббард-I для расчета сверхпроводящей корреляционной функции для гамильтониана Хаббарда.
- 6) Исследована антиферромагнитная неустойчивость электронов в AA-графене.
- 7) Построена и изучена модель для атомов водорода, адсорбированных на графене; изучено фазовое расслоение в такой системе.
- 8) Для треугольной квантовой точки из графена были найдены волновые функции и собственные энергии одночастичных состояний.

Все эти задачи объединены тем, что исследуемые системы являются или низкоразмерными (например, графен), или сильно анизотропными (квазиодномерные проводники).

Научная новизна В представленной работе получен ряд новых результатов:

- 1) На основе отображения гамильтониана Томонаги-Латтинжера на гамильтониан невзаимодействующих или слабо взаимодействующих фермионов была разработана техника вычисления пропагатора плотность-плотность для модели Томонаги-Латтинжера с нелинейной дисперсией. Найденный пропагатор плотность-плотность может быть использован для расчета коэффициента кулоновского увлечения в системе двух одномерных параллельных квантовых проволок.
- 2) Показано, что основное состояние системы одномерных бесспиновых фермионов, взаимодействующих посредством несущественного (в смысле ренормгруппы) взаимодействия, может быть получено из основного состояния свободных фермионов с помощью теории возмущений. Однако влияние такого взаимодействия приводит к разрушению фермионных квазичастиц. В результате возникает новая разновидность одномерной фермионной материи.
- 3) Для квазиодномерного сверхпроводника был предложен нефононный механизм сверхпроводимости, и перечислены допустимые виды сверхпроводящего параметра порядка.
- 4) Для модели Хаббарда с произвольным уровнем легирования на основе теории возмущений Бриллюэна-Вигнера была разработана схема вычисления низкоэнергетического эффективного гамильтониана, обобщающего t - J модель, а также получены выражения для наблюдаемых величин. Были изучены связи между различными методами получения эффективного гамильтониана.

- 5) Проведено изучение надежности приближения Хаббард-I для расчета сверхпроводящей корреляционной функции для гамильтониана Хаббарда: показано, что приближенная функция воспроизводит асимптотику корреляционной функции, найденной численно с помощью метода Монте-Карло.
- 6) Был исследован двуслойный графен с AA-упаковкой. Показано, что данный материал неустойчив по отношению к нескольким нарушениям симметрии, самой сильной из которых является антиферромагнитная неустойчивость.
- 7) Была построена и изучена модель для атомов водорода, адсорбированных на графене. Поскольку адсорбированный водород испытывает фазовое расслоение, собираясь в двумерные «лужи», было введено понятие энергии линейного натяжения для границы такой «лужи», а также дана оценка этой энергии.
- 8) Обобщая решение Ляме для уравнения Гельмгольца в равносторонней треугольной области, для треугольной квантовой точки из графена были найдены волновые функции и собственные энергии одночастичных состояний.

Практическая и теоретическая значимость В диссертации разработаны новые теоретические методы и предсказаны новые физические явления. Результаты, представленные в ней, могут быть использованы для исследования квазиодномерных и одномерных систем (атомы в квазиодномерной оптической ловушке или электроны в квантовой проволоке), анизотропных сверхпроводников с необычным механизмом спаривания, а также для изучения систем на основе графена.

Методология и методы исследований Теоретические исследования велись с использованием как общепфизических методов, таких как теория возмущений, метод канонического преобразования и, где это допустимо, при-

ближение среднего поля, так и с помощью бозонизации, более специализированного подхода, применяемого для исследования одномерных квантовых систем. Было также использовано неконтролируемое приближение Хаббард-I. Точность результатов, полученных с помощью такого приближения, проверялась численным расчетом.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) При специальном выборе параметров одномерный гамильтониан Томонаги-Латтинжера с нелинейной дисперсией унитарно эквивалентен гамильтониану свободных фермионных квазичастиц. Это обстоятельство позволяет найти пропагатор плотность-плотность для модели Томонаги-Латтинжера с нелинейной дисперсией. Пользуясь вычисленным пропагатором, можно продемонстрировать, что коэффициент кулоновского увлечения r в системе двух одномерных параллельных квантовых проволок пропорционален квадрату температуры: $r = aT^2$. В общем случае, гамильтониан Томонаги-Латтинжера отображается на гамильтониан фермионных квазичастиц со слабым несущественным (в смысле ренормгруппы) взаимодействием. Поправка наинизшего порядка к r , вносимая данным взаимодействием, мала при малых T .
- 2) Несущественное (в смысле ренормгруппы) взаимодействие в системе одномерных фермионов приводит к образованию особого вида одномерной коррелированной жидкости, не сводящейся ни к жидкости Ферми, ни к жидкости Томонаги-Латтинжера.
- 3) При низкой температуре квазиодномерный металл может быть или сверхпроводником, или изолятором с волной плотности. Сверхпроводимость в таких системах может существовать без участия фононов, стабилизируясь

за счет одномерных электронных корреляций. Допустимые симметрии параметра порядка таковы: f -волна, d_{xy} -волна и $d_{x^2-y^2}$ -волна.

- 4) Для модели Хаббарда с произвольным уровнем легирования теория возмущений Бриллюэна-Вигнера по малому параметру (t/U) может быть использована для вычисления низкоэнергетического эффективного гамильтониана.
- 5) Корреляционная функция сверхпроводящего параметра порядка для гамильтониан Хаббарда, рассчитанная с помощью приближения Хаббард-I, воспроизводит асимптотику корреляционной функции, найденную численно по методу Монте-Карло.
- 6) Электронная система двуслойного графена с AA-упаковкой неустойчива по отношению к нескольким спонтанным нарушениям симметрии, самой сильной из которых является антиферромагнитная неустойчивость.
- 7) Свойства атомов водорода, адсорбированных на графене, могут быть описаны с помощью модели, подобной модели Фаликова-Кимбалла. Основное состояние модельного гамильтониана характеризуется фазовым расслоением: атомы собираются в макроскопические «лужи» с конечной погонной энергией натяжения границы.
- 8) Для графеновой квантовой точки, имеющей форму равностороннего треугольника и край типа «кресло», обобщенное решение Ляме для уравнения Гельмгольца в равносторонней треугольной области исчерпывает все собственные одноэлектронные волновые функции. Простая структура найденных волновых функций позволяет с их помощью вычислять матричные элементы.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались

на следующих конференциях: 34-е Совещание по физике низких температур, Сочи, Россия, 2006 г.; 2-я Международная конференция «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости», Звенигород, Россия, 2006 г.; The International Conference on Strongly Correlated Electron Systems, Хьюстон, США, 2007 г.; Московский международный симпозиум по магнетизму MISM 2008, Москва, Россия, 2008 г.; 9th International Conference on Materials and Mechanisms of Superconductivity, Токио, Япония, 2009 г.; RIKEN Symposium on Quantum Information Processing, Вако-ши, Япония, 2010 г.; Integrability & its Breaking in Strongly Correlated and Disordered Systems, Триест, Италия, 2011 г.; International School of Solid State Physics, 55th Course: «Phase Separation and Superstripes in High Temperature Superconductors and Related Materials», Эриче, Италия, 2012 г.; Sixth International Conference on the Fundamental Science of Graphene and Applications of Graphene-Based Devices (Graphene Week 2012), Дельфт, Нидерланды, 2012 г.; International Conference SUPERSTRIPES 2014, Эриче, Италия, 2014 г., а также на семинарах в Институте теоретической физики им. Ландау, Институте радиоэлектроники им. Котельникова, Стэнфордском университете, Университете Калифорнии, Ирвайн, Институте теоретической и прикладной электродинамики РАН, Физическом институте РАН.

Публикации. Материалы диссертации изложены в 16 оригинальных статьях в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16], а также частично в обзоре в рецензируемом журнале [A17].

Достоверность результатов работы определяется корректной постановкой задач, подбором адекватного метода исследований для каждого конкретного случая, использованием надежных приближений, а также сравнением результатов, полученных разными методами, сравнением результатов, полученных для сходных физических систем, в тех случаях, когда такие срав-

нения возможны. Достоверность также подтверждается тем, что результаты исследований были опубликованы в высокорейтинговых научных журналах, а также многократно представлялись на международных научных конференциях.

Личное участие автора состоит в постановке задач, разработке методов их решения, в подборе адекватных приближений, выполнении численных и аналитических расчетов, анализе полученных результатов, подготовке публикаций по выполненным исследованиям.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 276 страниц, из них 244 страницы текста, включая 32 рисунка. Библиография включает 263 наименования на 32 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель, и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В обзоре литературы проводится краткое обсуждение современного состояния научной литературы по теме диссертации.

В первой главе исследуется влияние несущественных (в смысле ренормгруппы) операторов на свойства одномерных фермионов. Учет таких операторов – весьма молодой раздел физики одномерных квантовых систем, который, однако, уже привлек внимание большого числа теоретиков-специалистов по низкоразмерным фермионам [1–7]. Современное состояние исследований описывается в обзорной статье [8].

В диссертации изложение результатов по этой тематике построено сле-

дующим образом. После обсуждения предварительных соображений и постановки задачи (часть 1.1), в частях 1.2, 1.3 и 1.4 исследуется вопрос о влиянии нелинейной фермионной дисперсии на свойства жидкости Томонаги-Латтинжера. А именно, рассматривается одномерная фермионная система с гамильтонианом Томонаги-Латтинжера:

$$H_{\text{TL}} = iv_{\text{F}} \int dx \left(: \psi_{\text{L}}^{\dagger} \nabla \psi_{\text{L}} : - : \psi_{\text{R}}^{\dagger} \nabla \psi_{\text{R}} : + g_0 \rho_{\text{L}} \rho_{\text{R}} \right), \quad \text{где } \rho_{\text{L,R}} = : \psi_{\text{L,R}}^{\dagger} \psi_{\text{L,R}} :, \quad (1)$$

к которому добавлены несущественные (в смысле ренормгруппы) поправки:

$$H_{\text{nl}} = v'_{\text{F}} \int dx \left(: \nabla \psi_{\text{L}}^{\dagger} \nabla \psi_{\text{L}} : + : \nabla \psi_{\text{R}}^{\dagger} \nabla \psi_{\text{R}} : \right), \quad (2)$$

$$H'_{\text{int}} = ig' \int dx \left[\rho_{\text{R}} \left(: \psi_{\text{L}}^{\dagger} (\nabla \psi_{\text{L}}) : - : (\nabla \psi_{\text{L}}^{\dagger}) \psi_{\text{L}} : \right) - \rho_{\text{L}} \left(: \psi_{\text{R}}^{\dagger} (\nabla \psi_{\text{R}}) : - : (\nabla \psi_{\text{R}}^{\dagger}) \psi_{\text{R}} : \right) \right]. \quad (3)$$

Один из основных результатов данной главы состоит в том, что, если коэффициенты v_{F} , g_0 , g' и v'_{F} удовлетворяют условию:

$$v'_{\text{F}} = \left(\frac{2v_{\text{F}}}{g_0} - \frac{1}{2\pi} \right) g', \quad (4)$$

то исследуемый гамильтониан

$$H = H_{\text{TL}} + H_{\text{nl}} + H'_{\text{int}} \quad (5)$$

является унитарно эквивалентным гамильтониану невзаимодействующих фермионов

$$H_0 = i\tilde{v}_{\text{F}} \int dx \left(: \tilde{\psi}_{\text{L}}^{\dagger} \nabla \tilde{\psi}_{\text{L}} : - : \tilde{\psi}_{\text{R}}^{\dagger} \nabla \tilde{\psi}_{\text{R}} : \right). \quad (6)$$

Соответствующий унитарный оператор U имеет следующий вид:

$$U = e^{\Omega}, \quad \text{где} \quad \Omega = -\frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \sum_p p \frac{\alpha_q}{n_q} \rho_{p-q} \rho_{-pq}, \quad (7)$$

$$n_q = \frac{Lq}{2\pi}, \quad \rho_{pq} = \int dx e^{-iqx} \rho_p(x), \quad (8)$$

где индексам хиральности «L» и «R» соответствуют числовые значения $p = -1$ и $p = +1$. В данной формуле L – длина системы, q – импульс, а α_q – c -числа, зависящие от параметров гамильтониана Томонаги-Латтинжера. Унитарный оператор U был впервые рассмотрен в работе 1965 года Маттиасом и Либом [9]. Однако, на возможность его использования для учета несущественных поправок было, по-видимому, впервые указано в работе диссертанта [A1].

Обнаруженная унитарная эквивалентность позволяет вычислить пропагатор плотность-плотность $\mathcal{D}_{q\omega}^{\text{ex}}$ для гамильтониана H , уравнение (5). Действительно, легко показать, что $\mathcal{D}_{q\omega}^{\text{ex}} = \mathcal{K}\mathcal{D}_{q\omega}^0$, где $\mathcal{D}_{q\omega}^0$ – пропагатор свободных фермионов, а \mathcal{K} – параметр Томонаги-Латтинжера. Таким образом, задача о вычислении пропагатора модели с взаимодействием сводится к вычислению пропагатора свободных фермионов.

Если условие (4) нарушено, то можно показать, что гамильтониан, описываемый формулой (5), унитарно эквивалентен гамильтониану одномерных фермионов с несущественным (в смысле ренормгруппы) взаимодействием. Строить теорию возмущений для несущественного взаимодействия зачастую гораздо проще, чем для маргинального оператора.

В части 1.5 разработанный формализм используется для вычисления коэффициента кулоновского увлечения в системе двух одномерных проволок, для которых верно условие (4). Кроме этого, рассчитывается поправка наименьшего порядка к коэффициенту увлечения, возникающая из-за нарушения условия (4). При низких температурах эта поправка мала.

В части 1.6 исследуется одномерный фермионный гамильтониан без маргинального взаимодействия:

$$H = iv_F \int dx \left(: \psi_L^\dagger \nabla \psi_L : - : \psi_R^\dagger \nabla \psi_R : \right) + H_{\text{nl}} + H'_{\text{int}}, \quad (9)$$

т.е. гамильтониан, даваемый уравнением (5), в котором $g_0 = 0$. Обнуление

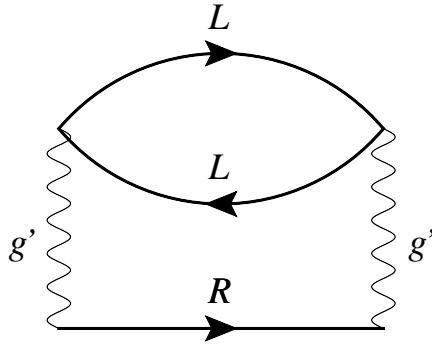


Рис. 1. Диаграмма для вклада наинизшего (второго) порядка по g' в собственно-энергетическую функцию фермионов, движущихся вправо. На диаграмме прямые линии со стрелками – фермионные пропагаторы. Индексы «L» и «R» указывают хиральность фермионов (двигаются влево – «L», двигаются вправо «R»). Волнистые линии соответствуют несущественному (в смысле ренормгруппы) взаимодействию с константой g' .

g_0 может принципиально изменить свойства системы. Действительно, хорошо известно, что необычные свойства жидкости Томонаги-Латтинжера связаны, в первую очередь, с маргинальным оператором межчастичного взаимодействия, определяемым константой g_0 . Можем ли мы ожидать, что при исчезновении маргинального оператора мы получим одномерную жидкость Ферми? Ответ на этот вопрос отрицательный: в диссертации показывается, что если в системе нет маргинального взаимодействия, но есть несущественное, то возникает новый вид одномерной фермионной жидкости, которая не похожа ни на жидкость Томонаги-Латтинжера, ни на жидкость Ферми. Действительно, собственно-энергетическая диаграмма, представленная на рис. 1, имеет логарифмическую расходимость на массовой поверхности. Это означает, что наш гамильтониан не допускает существование обычных фермионных квазичастиц. Таким образом, жидкость Ферми оказывается невозможна.

С другой стороны, вычисленная с помощью той же диаграммы поправка $\delta n_k^{R,L}$ к фермионным числам заполнения $n_k^{R,L} = \langle c_{R,Lk}^\dagger c_{R,Lk} \rangle$ конечна. Этот факт несовместим с известными свойствами жидкости Томонаги-Латтинже-

ра: данная поправка для жидкости Томонаги-Латтинжера расходится на энергии Ферми. Мы приходим к выводу, что получающаяся коррелированная жидкость – новое состояние одномерного вещества, не совпадающее ни с жидкостью Ферми, ни с жидкостью Томонаги-Латтинжера.

Из-за того, что первая глава является технически весьма сложной, для облегчения восприятия по ходу изложения многие трудные вычисления не приводились целиком. При необходимости подробности таких вычислений могут быть найдены в частях 1.7, 1.8, 1.9 и 1.10.

Результаты первой главы опубликованы в работах [A1, A2, A3, A4, A5].

Во второй главе исследуются нефононные механизмы сверхпроводимости в квазиодномерных металлах. Квазиодномерными мы называем материалы, у которых перескок t_{\parallel} для электрона (или другого фермиона, если мы имеем дело с неэлектронной системой) вдоль оси x много больше перескока t_{\perp} в поперечных направлениях. К таким системам относятся, например, органические сверхпроводники, так называемые соли Бехгарда [10].

В части 2.1 мы сформулируем исследуемую модель квазиодномерного проводника. В части 2.2 выясняется, при каких условиях к модели можно применять метод среднего поля. Важность этого вопроса связана с тем, что приближение среднего поля – наиболее общий метод изучения фазовой диаграммы фермионной системы. Оказывается, что данный метод работает, лишь когда анизотропия одночастичного перескока в нашей модели порядка единицы:

$$\frac{t_{\perp}}{v_F \Lambda} \sim 1. \quad (10)$$

Здесь $v_F \Lambda \sim t_{\parallel}$ – так называемая ширина «продольной» зоны (она характеризует энергию перескока вдоль оси x).

Это условие очень жесткое, оно практически отсекает все интересные квазиодномерные вещества, такие, например, как соли Бехгарда. Чтобы пре-

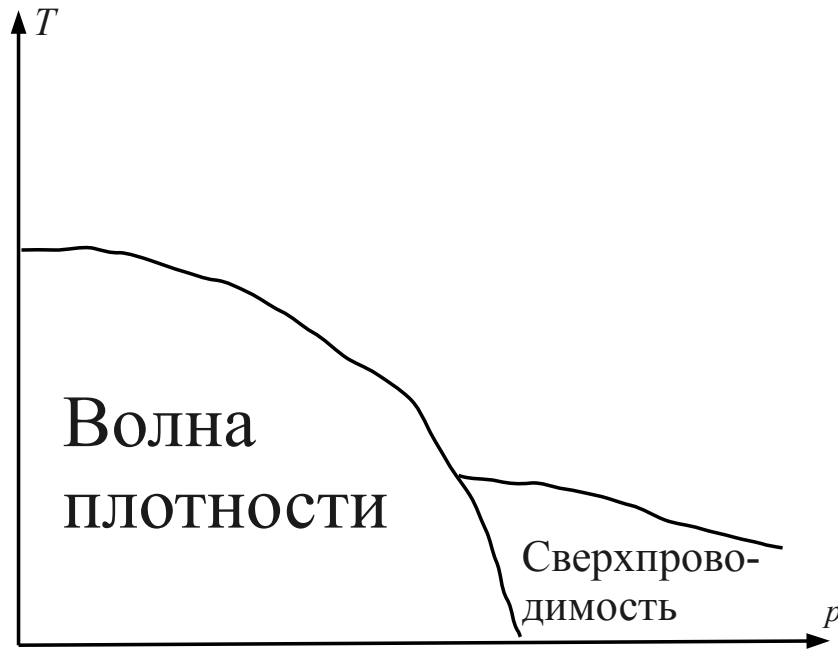


Рис. 2. Схематическая фазовая диаграмма для нашей модели квазиодномерного проводника. Рост внешнего давления p увеличивает перескок поперек оси x . Вследствие этого ухудшается нестинг, а также падает параметр анизотропии. Плохой нестинг разрушает волну плотности (спиновой или зарядовой). Это приводит к стабилизации сверхпроводимости при достаточно высоком давлении. Однако, и сама сверхпроводящая фаза исчезает с ростом давления из-за понижения анизотропии.

одолеть эту трудность, в части 2.3 предложен метод отображения исходного сильно анизотропного гамильтониана, описывающего бесспиновые слабо взаимодействующие фермионы, на эффективный гамильтониан, описывающий слабо взаимодействующие фермионные квазичастицы, для которого условие (10) выполнено.

Эффективный гамильтониан похож на исходный гамильтониан. Однако, из-за одномерных флуктуаций, его параметры оказываются перенормированными по сравнению с параметрами исходного гамильтониана. В частности, показано, что в достаточно общей модели квазиодномерного проводника влияние «одномерной» физики приводит к перенормировке отталкивательного взаимодействия вблизи поверхности Ферми. При этом одни процессы меж-

электронного рассеяния перенормируются сильнее других.

Легко можно установить, что фазовая диаграмма эффективного гамильтониана совпадает с диаграммой исходного гамильтониана. Поэтому нам достаточно получить диаграмму для эффективного гамильтониана. В отличие от исходного гамильтониана, эффективный гамильтониан можно исследовать с помощью приближения среднего поля, ведь он удовлетворяет условию (10).

Задача построения фазовой диаграммы для бесспиновых фермионов решается в части 2.4. Применяя метод среднего поля к эффективному гамильтониану, удастся установить следующее. В квазиодномерной системе при наличии хорошего нестинга возникает волна зарядовой плотности. При разрушении нестинга эта фаза пропадает. Упомянутая выше неоднородная перенормировка межфермионного взаимодействия создает ситуацию, в которой сверхпроводимость становится как минимум метастабильной и конкурирует с волной плотности. Когда нестинг близок к идеальному, волна плотности подавляет сверхпроводимость. При плохом нестинге сверхпроводимость может стать основным состоянием. Схематическая фазовая диаграмма представлена на рис. 2.

В частях 2.5 и 2.6 данная программа исследований выполняется для квазиодномерных электронов (т.е., фермионов со спином). Фазовая диаграмма для квазиодномерных электронов подобна фазовой диаграмме, изображенной на рис. 2. Однако, из-за наличия спина, количество возможных параметров порядка увеличивается. В частности, в рамках используемого метода возможна волна спиновой или зарядовой плотности, а также два типа сверхпроводящего параметра порядка.

В части 2.7 обобщается процедура вывода эффективного гамильтониана для квазиодномерных электронов. Это позволяет, в свою очередь, обобщить список возможных сверхпроводящих параметров порядка, который мы уже получили в части 2.6. Оказывается, в нашей системе возможны три ти-

па сверхпроводимости. Построенная качественная диаграмма похожа на так называемую универсальную фазовую диаграмму для органических сверхпроводников [11].

Результаты второй главы опубликованы в работах [A6, A7, A8, A9, A10].

В третьей главе изучаются некоторые приближенные способы исследования модели Хаббарда. Напомним, что гамильтонианом Хаббарда называют оператор

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} c_{\sigma i}^{\dagger} c_{\sigma j} - \sum_i \mu (n_{\uparrow i} + n_{\downarrow i}) + \sum_i U \left(n_{\uparrow i} - \frac{1}{2} \right) \left(n_{\downarrow i} - \frac{1}{2} \right). \quad (11)$$

Здесь μ – это химический потенциал, измеряемый от состояния с половинным заполнением, U – энергия отталкивания между двумя электронами, находящимися на одном узле решетки, t – амплитуда электронного перескока с i -го узла на j -ый узел (данные узлы должны являться ближайшими соседями, что обозначается треугольными скобками в формуле (11)).

Ниже нами будут рассмотрены две проблемы, связанные с данным гамильтонианом. В части 3.1 мы изучим вывод эффективных моделей для гамильтониана Хаббарда. В литературе хорошо известно отображение гамильтониана Хаббарда на гамильтониан t - J модели

$$H_{tJ} = P_0 \left[-t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (c_{\sigma i}^{\dagger} c_{\sigma j} + c_{\sigma j}^{\dagger} c_{\sigma i}) + J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \right] P_0. \quad (12)$$

Данное преобразование применимо в пределе $U \gg t$. Оно учитывает члены порядка t^2/U : действительно, $J \sim t^2/U$.

Однако, в связи с возросшим вниманием к моттовскому диэлектрику, в литературе часто ставится вопрос о поправках более высоких порядков к гамильтониану t - J модели. В частности, многие теоретики исследуют влияние так называемых четырехспиновых членов кольцевого обмена («four-spin ring exchange terms»), которые имеют порядок t^4/U^3 . В качестве примера недавней работы на эту тему можно указать статью [12].

Вследствие значительного интереса к обобщениям гамильтониана H_{tJ} в нескольких работах высшие поправки к t - J модели были выведены из модели Хаббарда. Удивительно, но результаты этих вычислений в разных статьях оказались отличными друг от друга: поправки четвертого порядка по (t/U) (поправки n -го порядка пропорциональны $U(t/U)^n$), найденные в работах [13–15], не совпадают с поправками, вычисленными в [16]. Это расхождение было объяснено Штайном в статье [16], а позднее такие же выводы были получены в работе [A11]: нетождественные формы эффективного гамильтониана являются, однако, унитарно эквивалентными друг другу. Такая «множественность» эффективных теорий – новое явление, возникающее лишь в высших порядка при конечном легировании.

Также оказывается, что метод теории возмущений Бриллюэна-Вигнера, успешно применявшийся для вывода гамильтониана t - J модели (12), сталкивается с трудностями при попытке вычислить дальнейшие члены разложения. Например, в статье [17] полученный гамильтониан – неэрмитов.

Такое положение дел заставляет отнестись к выводу высших поправок с особой осторожностью. В данной части мы затронем следующие проблемы. Во-первых, применяя две разные версии метода канонического преобразования, будут выведены два разных эффективных гамильтониана для модели Хаббарда, учитывающие члены четвертого порядка. Для этих гамильтонианов будет показано, что, несмотря на различия в записи, они являются унитарно эквивалентными друг другу. Во-вторых, будет объяснено, как можно использовать теорию возмущений Бриллюэна-Вигнера для вывода эффективного гамильтониана вплоть до членов порядка $U(t/U)^4$.

В части 3.2 мы исследуем сверхпроводящие корреляции в модели Хаббарда с помощью так называемого приближения Хаббард-I, и покажем, что такое приближение в состоянии адекватно описывать имеющиеся численные результаты. Хорошо известно, что теоретические и численные исследования

модели Хаббарда в пределе сильной и промежуточной связи сталкиваются с серьезными трудностями. Теоретические усилия сдерживаются тем, что модель не содержит малого параметра, по которому можно бы было построить теорию возмущений приемлемого качества. Точные решения также не известны, за исключением случая одномерной модели Хаббарда.

Что касается численных расчетов, то они возможны лишь на кластерах малых размеров: как и в случае с любой квантовой системой, пространство состояний модели Хаббарда растет экспоненциально с ростом размера системы. Так, для двумерной модели Хаббарда численные расчеты по методу Монте-Карло, выполненные на решетке 10×10 [18], являются передовым достижением современной науки. Экстраполировать результаты подобных расчетов на макроскопическую решетку часто бывает затруднительно.

В такой ситуации возможный способ действия – использование так называемых неконтролируемых схем. Неконтролируемая схема – это теоретический метод, основанный на упрощающем предположении или предположениях, точность которых не известна априори. Поскольку строгий критерий применимости у таких подходов отсутствует, при работе с ними теоретики оправдываются, ссылаясь на «интуитивные аргументы», простоту формализма и согласие с экспериментом или численными расчетами.

Модель Хаббарда активно изучается с помощью неконтролируемых подходов. Хорошо известен метод Хаббард-I [19]. Он основан на определенном способе обрыва цепочки уравнений движения для функции Грина модели Хаббарда. Говоря более конкретно, если мы попытаемся записать уравнение движения для мацубаровской функции Грина $G_{\sigma}(\mathbf{j} - \mathbf{i}, \tau) = -\langle \hat{T} c_{\mathbf{j}\sigma}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^{\dagger}(0) \rangle$, то мы обнаружим, что в данное уравнение движения входит новая функция Грина

$$F_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathbf{j} - \mathbf{i}, \tau) = -\langle \hat{T} c_{\mathbf{j}\sigma}(\tau) n_{\mathbf{j}\bar{\sigma}}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^{\dagger}(0) \rangle. \quad (13)$$

Такая ситуация типична для уравнений движения на функцию Грина системы с взаимодействием. Из-за оператора взаимодействия в уравнении движения возникает новая функция Грина, причем уравнение движения на нее будет содержать еще одну функцию, не сводящуюся к предыдущим. Возникает бесконечная цепочка уравнений движения, которую приходится обрывать каким-то способом. Метод Хаббард-I предлагает следующий рецепт: возникающие в уравнении для $F_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathbf{j} - \mathbf{i}, \tau)$ функции Грина «расцепить»:

$$\langle \hat{T} c_{\mathbf{j}+\mathbf{a}\sigma}(\tau) n_{\mathbf{j}\bar{\sigma}}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^\dagger(0) \rangle \rightarrow \langle n_{\mathbf{j}\bar{\sigma}} \rangle \langle \hat{T} c_{\mathbf{j}+\mathbf{a}\sigma}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^\dagger(0) \rangle, \quad (14)$$

$$\langle \hat{T} c_{\mathbf{j}\sigma}(\tau) c_{\mathbf{j}+\mathbf{a}\bar{\sigma}}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{j}\bar{\sigma}}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^\dagger(0) \rangle \rightarrow \langle c_{\mathbf{j}\bar{\sigma}} c_{\mathbf{j}\sigma} \rangle \langle \hat{T} c_{\mathbf{j}+\mathbf{a}\bar{\sigma}}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^\dagger(0) \rangle = 0, \quad (15)$$

$$\langle \hat{T} c_{\mathbf{j}\sigma}(\tau) c_{\mathbf{j}\bar{\sigma}}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{j}+\mathbf{a}\bar{\sigma}}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^\dagger(0) \rangle \rightarrow \langle c_{\mathbf{j}\sigma} c_{\mathbf{j}\bar{\sigma}}^\dagger \rangle \langle \hat{T} c_{\mathbf{j}+\mathbf{a}\bar{\sigma}}(\tau) c_{\mathbf{i}\sigma}^\dagger(0) \rangle = 0. \quad (16)$$

Эта подстановка «замыкает» систему уравнений движения, позволяя найти функцию Грина $G_\sigma(\mathbf{j} - \mathbf{i}, \tau)$. Позднее метод был несколько усовершенствован в работе [20]. Усовершенствованный подход в литературе называется приближением двух полюсов.

Указанная факторизация функций Грина – приближение неизвестной точности. Однако, поскольку исключить использование неконтролируемых методов в физике многих частиц, видимо, просто невозможно, необходимо для каждого конкретного подхода выяснять пределы его применимости. Поэтому, необходимо как можно более широкое сравнение результатов, полученных с помощью данного подхода, с численными данными, с экспериментом, а также с теоретическими выводами, полученными с помощью других неконтролируемых методов. Результаты, полученные по методу Хаббард-I, сравнивались с результатами метода Монте-Карло и результатами других подходов в работах [21–24], а также в работах [A12, A13]. В этих публикациях показано, что, метод Хаббард-I, хотя и не дает точной (как пишут в современной литературе, «количественной») информации о системе, ухватывает многие «качественные» свойства. В частности, сравнение приближения Хаббард-I с

методом динамической теорией среднего поля, являющимся сегодня одним из ведущих способов исследования сильнокоррелированных систем, показало [21], что приближенно вычисленная фазовая диаграмма так называемой модели Фаликова-Кимбалла практически одинакова для обоих подходов.

В работе [22] сравнивалась «зонная структура» модели Хаббарда, вычисленная по методу Монте-Карло и по модифицированному методу Хаббард-I. Было показано, что дисперсия пиков в одночастичных спектральных функциях в обоих случаях похожая. Таким образом, можно ожидать, что простые средства Хаббард-I могут применяться для исследования одночастичных возбуждений в моделях типа модели Хаббарда.

Данная часть диссертации также внесет свою лепту в дело изучения надежности подхода Хаббард-I. Обобщая идею метода Хаббард-I, мы покажем, как можно вычислить (неконтролируемым образом) двучастичный пропагатор, характеризующий восприимчивость модели к сверхпроводящему параметру порядка. После этого мы сравним данный пропагатор с результатами, полученными с помощью метода Монте-Карло [18]. Мы увидим, что и численный пропагатор, и «неконтролируемый» пропагатор имеют одинаковое асимптотическое поведение. Этот результат говорит о том, что Хаббард-I может быть использован для изучения сверхпроводящих свойств модели Хаббарда, что является весьма актуальной проблемой современной теоретической физики.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [A11, A12, A13].

В четвертой главе исследуются мезоскопические системы на основе графена. В части 4.1 вводится модель графена в приближении сильной связи.

В части 4.2 изучаются электронные неустойчивости двуслойного AA-графена. Кроме одиночного листа графена, интерес представляют двуслойные и многослойные системы на основе графена (графеновые двуслойки и многослойки). Свойства многослойных систем зависят как от количества графе-

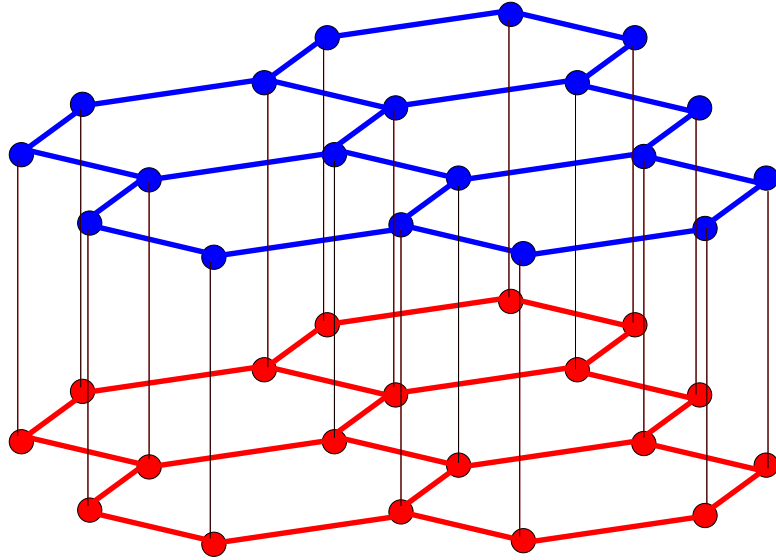


Рис. 3. Двуслойка типа АА. Атомы верхнего слоя (синие кружки) находятся точно над атомами нижнего слоя (красные кружки).

новых слоев, так и от типа наложения слоев друг на друга. Для двуслойки возможны два симметричных типа наложения – АА и АБ. В случае АА-графена слои совмещаются параллельным переносом на вектор \mathbf{e}_z , который перпендикулярен поверхности графена, смотри рис. 3.

Известно [25], что электронный спектр АА-двуслойки состоит из 4-х зон (по две зоны от каждого листа графена участвуют в образовании зон двуслойки). Из них одна электронная и одна дырочная зона пересекают уровень Ферми. При этом, дырочная и электронная поверхности Ферми совпадают [25, 26]. Электронный спектр с такой особенностью неустойчив по отношению к сразу нескольким видам спонтанного нарушения симметрий исходного электронного гамильтониана. Мы в подробностях исследуем только антиферромагнитную неустойчивость, поскольку она, как показывают наши оценки, наиболее сильная.

В диссертации для изучения антиферромагнитной неустойчивости используется модель Хаббарда на соответствующей решетке. В приближении слабого взаимодействия и при нулевой температуре такую модель можно

исследовать с помощью метода среднего поля. Показано, что в этих условиях, действительно, антиферромагнитное состояние (также называемое в литературе «соизмеримая волна спиновой плотности») является стабильным основным состоянием. При $T > 0$ дальний порядок разрушается, однако, антиферромагнитные корреляции продолжают оказывать сильное влияние на свойства двуслойки вплоть до температуры кроссовера, которая по порядку величины равна антиферромагнитной щели при $T = 0$.

В части 4.3 исследуется фазовое расслоение атомов водорода, адсорбированных на поверхности графена. Создание графенового образца с гладкой границей – важная прикладная задача. Очевидный подход – разорвать лист графена на фрагменты с ровными краями [27]. Альтернатива – использование графана. Графан [28] – полностью гидрогенизированный графен. Это изолятор со щелью в несколько эВ. Если провести в графене локальную дегидрогенизацию, то получился бы образец, в котором проводящие фрагменты графена были бы включены в диэлектрическую матрицу графана. При этом граница раздела графен-графан служит эффективным краем для проводящих электронов в графене. Системы на основе графен-графан были рассмотрены в ряде работ [29, 30]. Таким образом, вопрос о стабильности границы графен-графан является важной задачей физики графена.

Численные исследования [31, 32] показывают, что такая граница является стабильной, а адсорбированные атомы водорода кластеризуются [33], образуя области гидрогенизированного графена. Тенденция к кластеризации может быть объяснена в терминах фазового расслоения на гидрогенизированные и свободные от водорода области графенового листа. Наличие фазового расслоения было продемонстрировано теоретически с помощью полуфеноменологического подхода [34].

В диссертации теоретическое описание, предложенное в работе [34], будет обобщено. Вместо полуфеноменологической теории, основанной на пред-

положении о виде взаимодействия между электронами в графене и адсорбированным водородом, в диссертации предложена микроскопическая модель, которая, по сути, является модифицированной моделью Фаликова-Кимбалла. Преимущество подобного подхода в его общности: для основного состояния модели Фаликова-Кимбалла известно, что оно неустойчиво по отношению к фазовому расслоению [35–39]. Таким образом, можно продемонстрировать, что фазовое расслоение – не исключительное свойство водорода на графене, и адсорбированные атомы или радикалы других типов будут демонстрировать похожее поведение. Параметры фазового расслоения изучаются с помощью приближения Хаббард-I [19]. Кроме этого, для проверки надежности приближения Хаббард-I, проведена точная численная диагонализация для конечного кластера.

Также исследуется вопрос о связи между фазовым расслоением и устойчивостью границы графен-графан. Оказывается, что граница имеет положительное поверхностное натяжение: чтобы увеличить ее длину, нужно совершить конечное количество работы, которое пропорционально приращению длины границы. Мы оценим данную величину. Она окажется достаточно большой. Таким образом, можно ожидать, что граница раздела будет стабильной и гладкой на заметных расстояниях. В частности, согласно полученным оценкам, при комнатной температуре, граница будет обладать атомной гладкостью на протяжении $\sim 10^2$ решеточных констант. Такая устойчивость очень привлекательна для создания баллистических мезоскопических устройств.

В части 4.4 находятся точные волновые функции для квантовой точки треугольной формы из графена. Фрагменты графена в форме правильного треугольника – реально существующие объекты. Их форма связана с кристаллографией графена (другой устойчивой и симметричной формой, встречающейся в эксперименте, является правильный шестиугольник). Вычисление

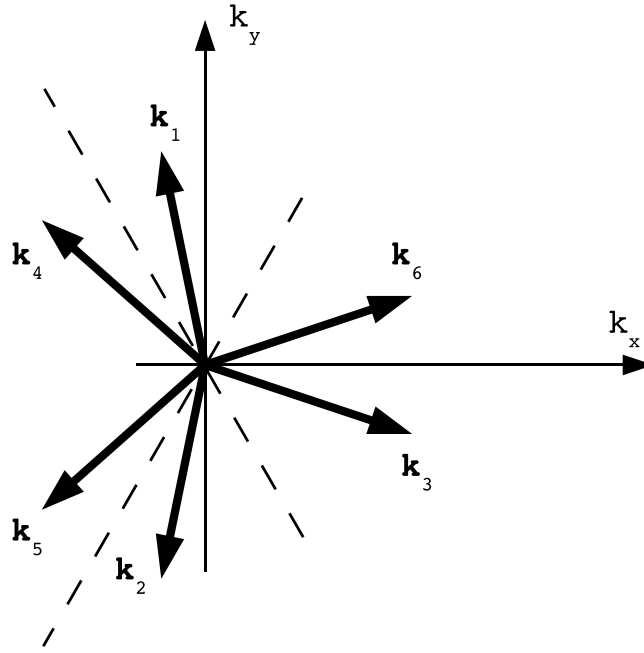


Рис. 4. Любая волновая функция треугольной квантовой точки может быть выражена как сумма шести плоских волн. Волновые вектора данного секстета переходят друг в друга под действием операторов группы C_{3v} (группа геометрической симметрии для правильного треугольника). Группа C_{3v} допускает повороты на 120° , а также отражения относительно осей $k_y = \pm\sqrt{3}k_x$ (показаны пунктиром) и $k_y = 0$.

точных одноэлектронных волновых функций для такого фрагмента – важная теоретическая задача. Найденные функции могут быть использованы для расчета оптических свойств квантовой точки, а также могут служить базисом для расчета электронных свойств с учетом кулоновского отталкивания. Было показано, что все волновые функции квантовой точки можно представить как сумму шести плоских волн с волновыми векторами, связанными определенным симметричным условием (смотри рис. 4). На какой-нибудь один волновой вектор из данного секстета необходимо также наложить условие квантования:

$$k_x = \frac{2\pi}{3L}(n - m), \quad (17)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\sqrt{3}L}(n + m), \quad (18)$$

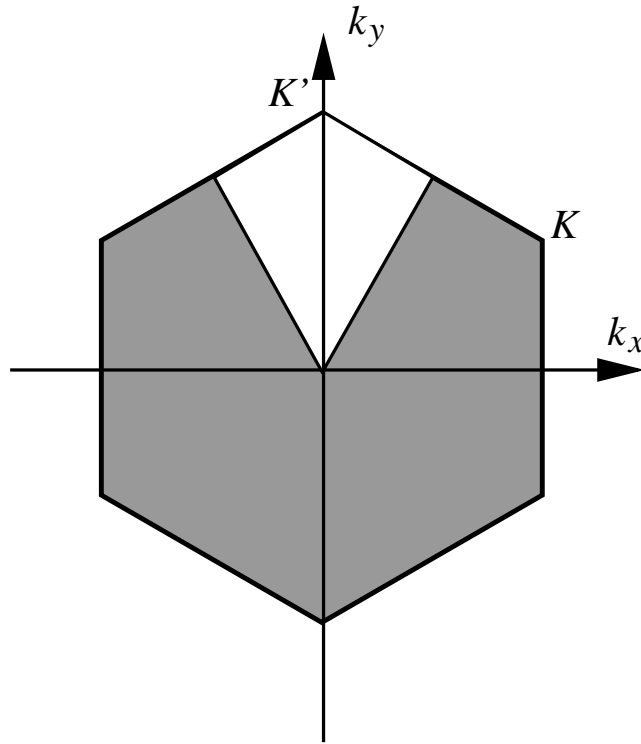


Рис. 5. Шестиугольник изображает зону Бриллюэна в графене. Белый четырехугольник – область, где лежат волновые вектора, допускаемые нашей схемой индексирования одноэлектронных состояний треугольной квантовой точки из графена.

где n и m – целые числа, а L – длина стороны некоей «эффективной» квантовой точки, которая чуть больше, чем соответствующий физический объект. Любая волновая функция может быть представлена с помощью пары (n, m) . К сожалению, такое представление не является взаимнооднозначным: существует более одной пары, описывающей одну и ту же функцию. Для установления взаимнооднозначного соответствия приходится потребовать, чтобы вектор (k_x, k_y) лежал внутри определенного сектора зоны Бриллюэна (смотри рис. 5). Данные волновые функции и собственные энергии позволяют не только целиком описать спектр квантовой точки, но и рассчитывать одноэлектронные матричные элементы.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [A14, A15, A16], а также частично изложены в обзоре [A17].

В Заключение суммируются основные выводы диссертации.

Список работ по теме диссертации

- A1. Rozhkov A. V. Fermionic quasiparticle representation of Tomonaga-Luttinger Hamiltonian // Eur. Phys. J. B. 2005. Vol. 47. Pp. 193–206.
- A2. Rozhkov A. V. Class of exactly soluble models of one-dimensional spinless fermions and its application to the Tomonaga-Luttinger Hamiltonian with nonlinear dispersion // Phys. Rev. B. 2006. — Dec. Vol. 74. P. 245123.
- A3. Rozhkov A. V. Density-density propagator for one-dimensional interacting spinless fermions with nonlinear dispersion and calculation of the Coulomb drag resistivity // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 77. P. 125109.
- A4. Rozhkov A. V. Erratum: Density-density propagator for one-dimensional interacting spinless fermions with nonlinear dispersion and calculation of the Coulomb drag resistivity [Phys. Rev. B 77, 125109 (2008)] // Phys. Rev. B. 2009. — Jun. Vol. 79. P. 249903.
- A5. Rozhkov A. V. One-Dimensional Fermions with neither Luttinger-Liquid nor Fermi-Liquid Behavior // Phys. Rev. Lett. 2014. — Mar. Vol. 112. P. 106403.
- A6. Rozhkov A. V. Variational description of the dimensional crossover in an array of coupled one-dimensional conductors // Phys. Rev. B. 2003. — Sep. Vol. 68. P. 115108.
- A7. Rozhkov A. V. Application of the Mean-Field Approximation to the Magnetic and Superconducting Phases of Quasi-One-Dimensional Metal // Solid State Phenom. 2009. Vol. 152 - 153. P. 591.

- A8. Rozhkov A. V. Competition between different order parameters in a quasi-one-dimensional superconductor // Phys. Rev. B. 2009. — Jun. Vol. 79. P. 224501.
- A9. Rozhkov A. V. Superconductivity without attraction in a quasi-one-dimensional metal // Phys. Rev. B. 2009. — Jun. Vol. 79. P. 224520.
- A10. Rozhkov A. V. Different types of dimensional crossover in quasi-one-dimensional spinless fermion systems // Phys. Rev. B. 2012. — Jan. Vol. 85. P. 045106.
- A11. Chernyshev A. L., Galanakis D., Phillips P. et al. Higher order corrections to effective low-energy theories for strongly correlated electron systems // Phys. Rev. B. 2004. — Dec. Vol. 70. P. 235111.
- A12. Rozhkov A. V., Rakhmanov A. L. Hubbard-I approximation as a tool for study of superconducting properties of the Hubbard model with repulsive interaction // Physica C. 2010. Vol. 470 (Suppl. 1). Pp. S998 – S999.
- A13. Rozhkov A. V., Rakhmanov A. L. Evaluation of the two-particle propagator for the Hubbard model with the help of the Hubbard-I approximation // J. Phys.: Condens. Matter. 2011. Vol. 23. P. 065601.
- A14. Rakhmanov A. L., Rozhkov A. V., Sboychakov A. O., Nori F. Instabilities of the AA-Stacked Graphene Bilayer // Phys. Rev. Lett. 2012. — Nov. Vol. 109. P. 206801.
- A15. Rakhmanov A. L., Rozhkov A. V., Sboychakov A. O., Nori F. Phase separation of hydrogen atoms adsorbed on graphene and the smoothness of the graphene-graphane interface // Phys. Rev. B. 2012. — Jan. Vol. 85. P. 035408.

- A16. Rozhkov A. V., Nori F. Exact wave functions for an electron on a graphene triangular quantum dot // Phys. Rev. B. 2010. — Apr. Vol. 81. P. 155401.
- A17. Rozhkov A. V., Giavaras G., Bliokh Y. P. et al. Electronic properties of mesoscopic graphene structures: Charge confinement and control of spin and charge transport // Phys. Rep. 2011. Vol. 503. Pp. 77 – 114.

Цитированная литература

1. Aristov D. N. Luttinger liquids with curvature: Density correlations and Coulomb drag effect // Phys. Rev. B. 2007. — Aug. Vol. 76. P. 085327.
2. Imambekov A., Glazman L. I. Universal Theory of Nonlinear Luttinger Liquids // Science. 2009. Vol. 323. Pp. 228–231.
3. Pereira R. G., Sirker J., Caux J.-S. et al. Dynamical Spin Structure Factor for the Anisotropic Spin-1/2 Heisenberg Chain // Phys. Rev. Lett. 2006. — Jun. Vol. 96. P. 257202.
4. Pirooznia P., Kopietz P. Damping of zero sound in Luttinger liquids // Eur. Phys. J. B. 2007. Vol. 58. Pp. 291–296.
5. Pustilnik M., Khodas M., Kamenev A., Glazman L. I. Dynamic Response of One-Dimensional Interacting Fermions // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 196405.
6. Samokhin K. V. Lifetime of excitations in a clean Luttinger liquid // J. Phys.: Condens. Matter. 1998. Vol. 10. P. L533.
7. Teber S. Tails of the dynamical structure factor of 1D spinless fermions beyond the Tomonaga approximation // Eur. Phys. J. B. 2006. Vol. 52. Pp. 233–244.

8. Imambekov A., Schmidt T. L., Glazman L. I. One-dimensional quantum liquids: Beyond the Luttinger liquid paradigm // *Rev. Mod. Phys.* 2012. — Sep. Vol. 84. Pp. 1253–1306.
9. Mattis D., Lieb E. Exact Solution of a Many-Fermion System and Its Associated Boson Field // *J. Math. Phys.* 1965. Vol. 6. P. 304.
10. Jerome D., Mazaud A., Ribault M., Bechgaard K. Superconductivity in a synthetic organic conductor $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$ // *J. Physique Lett.* 1980. Vol. 41. Pp. 95–98.
11. Jaccard D., Wilhelm H., Jérôme D. et al. From spin-Peierls to superconductivity: $(\text{TMTTF})_2\text{PF}_6$ under high pressure // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2001. Vol. 13. P. L89.
12. Majumdar K., Furton D., Uhrig G. S. Effects of ring exchange interaction on the Néel phase of two-dimensional, spatially anisotropic, frustrated Heisenberg quantum antiferromagnet // *Phys. Rev. B.* 2012. — Apr. Vol. 85. P. 144420.
13. Takahashi M. Half-filled Hubbard model at low temperature // *J. Phys. C: Solid State Phys.* 1977. Vol. 10. P. 1289.
14. MacDonald A. H., Girvin S. M., Yoshioka D. t/U expansion for the Hubbard model // *Phys. Rev. B.* 1988. — Jun. Vol. 37. Pp. 9753–9756.
15. MacDonald A. H., Girvin S. M., Yoshioka D. Reply to "Comment on ' t/U expansion for the Hubbard model'" // *Phys. Rev. B.* 1990. — Feb. Vol. 41. Pp. 2565–2568.
16. Stein J. Flow equations and the strong-coupling expansion for the Hubbard model // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 88. Pp. 487–511.

17. Su G. Remarks on the Brillouin-Wigner perturbation theory // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. Vol. 26. P. L139.
18. Aimi T., Imada M. Does Simple Two-Dimensional Hubbard Model Account for High- T_c Superconductivity in Copper Oxides? // J. Phys. Soc. Jpn. 2007. Vol. 76. P. 113708.
19. Hubbard J. Electron Correlations in Narrow Energy Bands // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1963. Vol. 276. Pp. 238–257.
20. Roth L. M. Electron Correlation in Narrow Energy Bands. I. The Two-Pole Approximation in a Narrow S Band // Phys. Rev. 1969. — Aug. Vol. 184. Pp. 451–459.
21. Sboychakov A. Phase separation in strongly correlated electron systems with wide and narrow bands: A comparison of the Hubbard-I and DMFT approximations // Physica B. 2013. Vol. 417. Pp. 49 – 56.
22. Dorneich A., Zacher M. G., Gröber C., Eder R. Strong-coupling theory for the Hubbard model // Phys. Rev. B. 2000. — May. Vol. 61. Pp. 12816–12824.
23. Vilks Y. M., Chen L., Tremblay A.-M. S. Theory of spin and charge fluctuations in the Hubbard model // Phys. Rev. B. 1994. — May. Vol. 49. Pp. 13267–13270.
24. Kohno M. Mott Transition in the Two-Dimensional Hubbard Model // Phys. Rev. Lett. 2012. — Feb. Vol. 108. P. 076401.
25. Prada E., San-Jose P., Brey L., Fertig H. A. Band topology and the quantum spin Hall effect in bilayer graphene // Solid State Commun. 2011. Vol. 151. Pp. 1075 – 1083.

26. de Andres P. L., Ramírez R., Vergés J. A. Strong covalent bonding between two graphene layers // *Phys. Rev. B*. 2008. — Jan. Vol. 77. P. 045403.
27. Li X., Wang X., Zhang L. et al. Chemically derived, ultrasmooth graphene nanoribbon semiconductors // *Science*. 2008. — Feb. Vol. 319. Pp. 1229–1232.
28. Sluiter M. H. F., Kawazoe Y. Cluster expansion method for adsorption: Application to hydrogen chemisorption on graphene // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 68. P. 085410.
29. Singh A. K., Yakobson B. I. Electronics and Magnetism of Patterned Graphene Nanoroads // *Nano Lett.* 2009. Vol. 9. Pp. 1540–1543.
30. Schmidt M. J., Loss D. Edge states and enhanced spin-orbit interaction at graphene/graphane interfaces // *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 81. P. 165439.
31. Опенов Л. А., Подливаев А. И. Спонтанная регенерация атомарно резкой границы раздела графен/графан при термическом разупорядочении // *Письма в ЖЭТФ*. 2009. Т. 90. С. 505–509.
32. Ao Z. M., Hernandez-Nieves A. D., Peeters F. M., Li S. Enhanced stability of hydrogen atoms at the graphene/graphane interface of nanoribbons // *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 97. P. 233109.
33. Roman T., Diño W. A., Nakanishi H., Kasai H. High-uptake graphene hydrogenation: a computational perspective // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2009. Vol. 21. P. 474219.
34. Shytov A. V., Abanin D. A., Levitov L. S. Long-Range Interaction between Adatoms in Graphene // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 016806.
35. Freericks J. K., Gruber C., Macris N. Phase separation and the segregation

- principle in the infinite- U spinless Falicov-Kimball model // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 60. Pp. 1617–1626.
36. Freericks J. K., Lieb E. H., Ueltschi D. Phase Separation due to Quantum Mechanical Correlations // Phys. Rev. Lett. 2002. — Feb. Vol. 88. P. 106401.
 37. Maška M. M., Czajka K. Pattern formation in the Falicov-Kimball model // Physica Stat. Solidi (b). 2005. Vol. 242. Pp. 479–483.
 38. Kugel K. I., Rakhmanov A. L., Sboychakov A. O. Phase Separation in Jahn-Teller Systems with Localized and Itinerant Electrons // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 267210.
 39. Sboychakov A. O., Kugel K. I., Rakhmanov A. L. Phase separation in a two-band model for strongly correlated electrons // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 76. P. 195113.