

на правах рукописи

Васин Михаил Геннадьевич

**Неравновесная динамика стекольного
перехода в квази-неэргодической
конденсированной системе**

01.04.07 – физика конденсированного состояния

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физико-техническом институте Уральского отделения Российской академии наук.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Рыжов Валентин Николаевич

доктор физико-математических наук,
профессор Сон Леонид Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор Доценко Виктор Степанович

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО “Казанский (Приволжский)
федеральный университет”

Защита состоится $\langle \quad \rangle$ _____ 2012 года в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.097.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина Российской академии наук по адресу: 142190, г. Троицк, Московская область, Калужское шоссе, стр. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФВД РАН.

Автореферат разослан $\langle \quad \rangle$ _____ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.097.01, кандидат
физико-математических наук

Т. В. Валянская

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Стекло известно человечеству очень давно, начиная со времён древней Египетской цивилизации, но предметом интенсивных исследований оно стало лишь в конце прошлого века. Существуют различные методы получения аморфного твёрдого состояния. Однако обычно стекло формируется охлаждением жидкости со скоростью, не позволяющей ей успеть закристаллизоваться. Этот процесс называют стекольным переходом. Стекольные переходы долгое время оставались неизвестными большинству физиков и почти не упоминались в учебниках по физике конденсированного состояния. Ситуация изменилась в 80-х годах прошлого столетия, когда исследования аморфных полупроводников и спиновых стёкол привели к росту интереса к стёклам вообще и процессам их формирования в частности. Сегодня область применения стёкол широка, начиная от прочных металлических стёкол на основе циркония до халькогенидных стекол в Blu-ray и HD-DVD дисках. К сожалению, на современном этапе развития физики конденсированного состояния, достижения в этой области в значительной степени строятся на методе проб и ошибок вследствие плохого понимания физики процесса стеклования. В теоретических исследованиях сложных неэргодических конденсированных систем, к которым относятся жидкофазные системы и стёкла, доминирующими стали методы компьютерного моделирования, позволяющие на молекулярном уровне проследить за протекающими в подобных системах сложными микроскопическими процессами. Однако, до сих пор не существует теории, позволяющей качественно и количественно описывать стекольный переход. Поэтому, для более глубокого понимания физики этого процесса и объяснения наблюдаемых универсальных особенностей поведения стеклующихся систем, необходимо дальнейшее развитие аналитических методов их теоретического описания.

Центральный вопрос физики стекольного состояния можно сформулировать следующим образом: является ли стекольный переход фазовым переходом, или его природа является исключительно динамической? Стекольный переход, с непрерывным изменением объёма и энтропии и резким изменением их производных, похож на фазовый переход второго рода по классификации Эренфеста. Но этот переход не сопровождается появлением у системы дальнего порядка, расходимостью восприимчивости и зависит от скорости охлаждения системы, что не позволяет отнести его к полноценным фазовым переходам. Кроме того, релаксационные процессы при стекольном переходе описывается формулой Фогеля-Фулчера-Таммана, а не степенным выражением, характерным для динамики в критической точке. Однако, описание стекольного перехода, как динамического эффекта, при котором стекольное состояние не является термодинамической фазой, не может объяснить расходимость нелинейной восприимчивости и неаррениусовское поведение температурной зависимости времени релаксации при температуре стеклования.

Ключом к ответу на эти вопросы считается тот факт, что время релаксации системы вблизи стекольного перехода расходится. В этом случае система является неравновесной и неэргодической, поскольку время релаксации настолько велико, что она не может достигнуть равновесного состояния за время наблюдения, а физические свойства системы зависят от кинетики протекающих процессов. В диссертации рассмотрены квази-неэргодические конденсированные системы, т.е. являющейся неэргодическими в течение макроскопического, но конечного промежутка времени. Это в корне отличает задачу от равновесной, в которой обычно рассматривается статический предел. Её решение требует развития фундаментальных представлений о неравновесной динамике замерзания сложных неэргодических систем и привлечения новых методов статистической физики, выходящих за рамки устоявшихся в данной области теоретических подходов.

Цель и задачи исследований

Цель работы — Теоретическое описание стекольного перехода в квази-неэргодических конденсированных системах. Развитие методов квантовой теории поля, неравновесной динамики и флуктуационной теории фазовых переходов для их применения в физике стекольных переходов. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработать метод описания неравновесной динамики квази-неэргодической конденсированной системы, учитывающий ультраметрическую структуру пространства состояний и основанный на современных методах неравновесной динамики и квантовой теории поля.
2. Провести аналитическое исследование релаксационной динамики неравновесной квази-неэргодической системы, находящейся вблизи фазового перехода второго рода.
3. Построить теоретическую модель стекольного перехода в конденсированной системе, не требующую априорного задания ультраметрической структуры пространства состояний.
4. Провести аналитическое исследование сформулированной модели с помощью методов неравновесной динамики и динамической флуктуационной теории фазовых переходов в области температур, близких к переходу жидкость-стекло.

Научная новизна работы

В диссертационной работе предложены новые аналитические подходы, позволяющие дать последовательное описание стеклования квази-неэргодических конденсированных систем. Полученные результаты позволяют значительно продвинуться в понимании физической природы стекольного перехода. Они

дают новый обобщающий взгляд на процессы, протекающие при стекольном переходе, и согласуются с экспериментальными данными. Все результаты диссертации являются новыми.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

1. Способ описания иерархии времён релаксации в модели квазинеэргодической конденсированной системы с помощью задания временной корреляционной функции случайного взаимодействия в виде тета-функции Хевисайда.
2. Ренормгрупповой метод описания критической динамики квазинеэргодической конденсированной системы, в котором ультраметричность пространства состояний системы задаётся с помощью сшивки систем ренормгрупповых уравнений, соответствующих большому и малому временным масштабам.
3. Теоретическое описание механизма нарушения флуктуационно-диссипативной теоремы в квазинеэргодической конденсированной системе.
4. Теоретическое представление фрустраций в калибровочной модели стекла Гейзенберга с помощью источников калибровочного поля.
5. Теоретическое описание стекольного перехода во фрустрированной модели трёхмерного гейзенберговского магнетика с использованием калибровочной теории с равновесными источниками калибровочного поля и ренормгруппового метода описания критической динамики квазинеэргодической системы.

Практическая и научная значимость работы

Работа носит теоретический характер. Предложенные в работе подходы дают возможность более последовательного, по сравнению с используемыми сегодня методами, аналитического описания стекольного перехода, что обуславливает её практическую значимость. Разработанные теоретические подходы могут быть использованы как для дальнейшего развития теории конденсированного вещества, так и для решения прикладных задач.

Личное участие соискателя

Основная часть задач, составляющих содержание этих работ, была поставлена и решена автором. Вклад автора настоящей диссертации в работы с соавторами заключается в разработке теоретических моделей для решения рассматриваемых задач, а также анализ полученных результатов.

Совокупность полученных результатов и теоретических положений позволяют квалифицировать выполненную работу как решение важной научной задачи - развитие теоретических представлений о природе стекольного перехода.

Апробация работы

Результаты работы докладывались автором на следующих конференциях: 8-th Liquid Matter Conference of the European Physical Society, Вена, Австрия, 6–10 сентября 2011; International Conference on Statistical Physics “SigmaPhi 2011”: Ларнака, Кипр, 11–15 июля 2011; International Conference on Liquid and Amorphous Metals “LAM14”, Рим, Италия, 11–16 июля 2010; 7-th Liquid Matter Conference, Лунд, Швеция 2008; XXXII Международная зимняя школа физиков-теоретиков “Коуровка-2008”, Екатеринбург, Россия 2008; Thirteenth international conference on liquid and amorphous metals “LAM13”, Екатеринбург, Россия 2007; XXIII IUPAP International Conference on Statistical Physics

(STATPHYS 23), Генуя, Италия, 9–13 июля, 2007; Statistical Physics 2006 Condensed Matter: Theory and Applications, Харьков, Украина, 12–15 сентября, 2006; 10-th International Conference on the Structure of Non-Crystalline Materials, Прага, Чешская республика, 18–22 сентября, 2006; XXXI Международная зимняя школа физиков-теоретиков “Коуровка-2006”, Екатеринбург-Челябинск, Россия, Февраль 22–28, 2006; 6-th Liquid Matter Conference of the European Physical Society, Утрехт, Нидерланды, 2–6 июля 2005; “XI All-Russian Conference on Structure and Properties of Metal and Slag Alloys”, Екатеринбург, Россия, 14–16 сентября, 2004; International Conference on Liquid and Amorphous Metals “LAM12”, Мец, Франция, 11–16 июля, 2004; Join ESRF-CECAM Workshop “Polymorphism in Liquid and Amorphous Matter”(POLIMAT), ESRF, Гренобль, Франция, 7–9 июля, 2004; Statistical Physics of Complex Fluids (STATPHYS22 Satellite Meeting), Занжан, Иран, 27 июня– 1 июля, 2004; International Workshop on Dynamics in Viscous Liquids, Мюнхен, Германия, 14–17 марта, 2004; XXX Международная зимняя школа физиков-теоретиков “Коуровка-2004”, Екатеринбург- Челябинск, Россия, Февраль 22–28, 2004;

Работа была выполнена при поддержке: РФФИ (гранты № 10-02-00882-а, 10-02-00700-а, 08-03-90415-Укр_а, 08-03-00609-а, 07-02-00110-а, 07-02-96045-р_урал_а, 04-03-96020-р2004урал_а, 01-02-96455-р2001урал_а), ФЦП “Интеграция”, ФЦП “Научные и педагогические кадры России”

Структура и объём работы

Диссертация состоит из Введения, 5 глав, Заключение и списка литературы. Работа изложена на 204 страницах, содержит 40 рисунков и список литературы, включающий 137 наименований.

Содержание работы

В **первой главе** приводится обзор основных экспериментально наблюдаемых свойств, характерных для стекольного перехода. Обсуждается вопрос об *универсальности* стекольного перехода в котором драматическим образом сочетаются как характерные черты термодинамических фазовых переходов, так и признаки, говорящие о его динамической природе. Затем кратко изложены основные теоретические подходы к описанию стеклования. В заключение обсуждаются связь между процессами стекольного перехода и гелеобразования.

Во **второй главе** кратко изложены функциональные методы неравновесной динамики, которые были использованы в диссертационной работе: метод динамического производящего функционала, и келдышевская техника описания динамики неравновесных систем (метод келдышевского функционала). Затем в мягкой модели спинового стекла Эдвадса-Андерсона [1] показан вывод уравнения теории взаимодействующих мод методом келдышевского функционала.

Далее рассматривается использование функциональных методов для описания квази-неэргодических фрустрированных систем, для чего предлагается способ введения ультраметрии пространства состояний системы в метод келдышевского функционала. Ультраметрия пространства состояний возникает при понижении температуры фрустрированной конденсированной системы вследствие каскада фазовых переходов нарушения эргодичности, при котором пространство состояний разбивается на иерархическое множество “долин”, разделённых барьерами свободной энергии [2]. Поскольку долины возникают в системе вследствие включения взаимодействия между её элементами предполагается, что первоначальное состояние системы единственно,

$$\langle \bar{m}_\alpha(t = -\infty) | \bar{m}_{\beta \equiv \alpha}^\dagger(t = -\infty) \rangle \equiv 1. \quad (1)$$

где \bar{m} — параметр порядка, характеризующий состояние системы и пред-

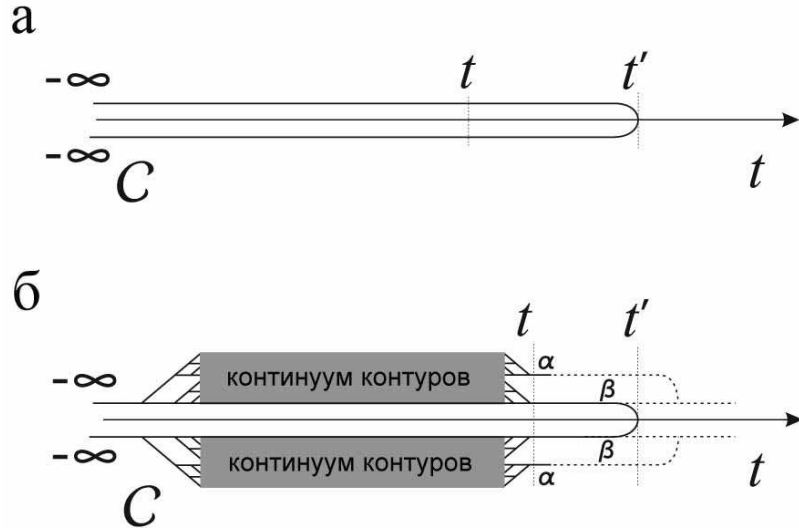


Рис. 1: Схематическое представление контура интегрирования по времени: а — контур обычный келдышевский техники, б — контур системы с ультраметрическим пространством состояний. В момент времени t' долины α и β разделены, они объединяются при $t > t'$. Для того чтобы изобразить бифуркации, приводящие к неэргодичности системы, этот контур изображен в виде дерева Кейли.

ставляющий собой вектор, $\bar{m} = \{m_q, m_{cl}\}$, состоящий из “классического”, m_{cl} , и “квантового”, m_q , полей. Это позволяет использовать технику Келдыша так же, как и в случае теории с ненарушенной эргодичностью, с той лишь разницей, что динамика квазиэргодической системы характеризуется наличием ультраметричности множества времён релаксации [1], которая может быть представлена в следующем виде (рис. 1): Если в некоторый начальный момент времени состояния системы находятся в различных долинах α и β , и являются взаимно независимыми, тогда корреляция полей параметра порядка m_α и m_β отсутствует. Тем не менее, по истечению времени порядка времени релаксации $\tau_{\alpha\beta}$, необходимого для того, чтобы долины α и β пришли в равновесие, т.е. состояния, принадлежащие этим долинам, перестали быть независимыми, коррелятор принимает некоторое конечное значение

$\langle m_\alpha m_\beta^\dagger \rangle \neq 0$. Время релаксации $\tau_{\alpha\beta}$ определяется расстоянием между долинами α и β в ультраметрическом пространстве, $x_{\alpha\beta}$. В результате опережающая, запаздывающая и келдышевская части функции Грина [3], действующей в пространстве (m_{cl}, m_q) , имеют вид:

$$G_{\alpha\beta}^R(t, t') = -i\theta((t - t') - \tau_{\alpha\beta})e^{-i\omega_0(t-t')}, \quad (2)$$

$$G_{\alpha\beta}^A(t, t') = i\theta((t' - t) - \tau_{\alpha\beta})e^{-i\omega_0(t-t')}, \quad (3)$$

$$G_{\alpha\beta}^K(t, t') = -i\theta(|t' - t| - \tau_{\alpha\beta})(1 + 2n_{\alpha\beta})e^{-i\omega_0(t-t')}. \quad (4)$$

где G^R , G^A , G^K — запаздывающая, опережающая и келдышевская составляющие функции Грина, соответственно. Здесь можно ввести в теорию эффективную температуру, $T_{\alpha\beta}$, которая характеризует состояние системы, в области пространства состояний, объединяющей долины α и β . Предполагая, что множество времён релаксации $\tau_{\alpha\beta}$, $\{\tau_{\alpha\beta}\}$, непрерывно, и $\tau \in \{\tau_{\alpha\beta}\}$, а $\omega_0 = \varepsilon_k/\Gamma = (k^2 + a)/\Gamma$, где Γ — кинетический коэффициент системы, можно представить корреляционную функцию в виде:

$$\langle \bar{m}\bar{m}^\dagger \rangle_{\tau, t} = \theta(|t| - \tau) \begin{pmatrix} \frac{\Gamma T(\tau)}{\varepsilon_k} e^{-\varepsilon_k |t|/\Gamma} & \theta(t) e^{-\varepsilon_k t/\Gamma} \\ -\theta(-t) e^{\varepsilon_k t/\Gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $T(\tau) = T_{\alpha\beta}$ при $\tau = \tau_{\alpha\beta}$.

В случае, когда пространство состояний системы не является ультраметрическим, выражение (5) описывает корреляционную функцию эргодической системы, поскольку система характеризуется единственным масштабом времени релаксации, $\tau = 0$, и (5) удовлетворяет условию выполнения флуктуационно-диссипативной теореме (59) [3]. Квази-неэргодическая же система характеризуется спектром времён релаксации, поэтому вблизи T_g корреляционная функция не удовлетворяет флуктуационно-диссипативной теореме, поскольку его келдышевская часть перенормируется:

$$\Gamma T(\tau) \longrightarrow \Gamma T(\tau) - \frac{4\Gamma T(\tau)}{2\pi T_g^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau \text{sinc}(\omega\tau) e^{i\omega\tau}}{(i\omega + a/\Gamma)(i\omega - a/\Gamma)} d\omega, \quad (6)$$

а опережающая и запаздывающая части остаются неизменными. Такую перенормировку можно интерпретировать как переопределение температуры, $T(\tau_{\alpha\beta})$, т.е. определение для неравновесной системы некоторой эффективной температуры. Таким образом, процедура перенормировки приводит к возникновению спектра эффективных температур $T_{\alpha\beta}$, характеризующих состояния, в которых долины α и β находятся в равновесии между собой, при этом флуктуационно-диссипативная теорема не выполняется при $\alpha \neq \beta$.

Для демонстрации связи между стеклованием и гелеобразованием в заключение второй главы описывается кроссовер вязкости переохлаждённой стеклующейся жидкости при температурах (рис. 2), превышающих температуру стеклования, представляющий собой переход от вязкого к вязко-упругому поведению системы.

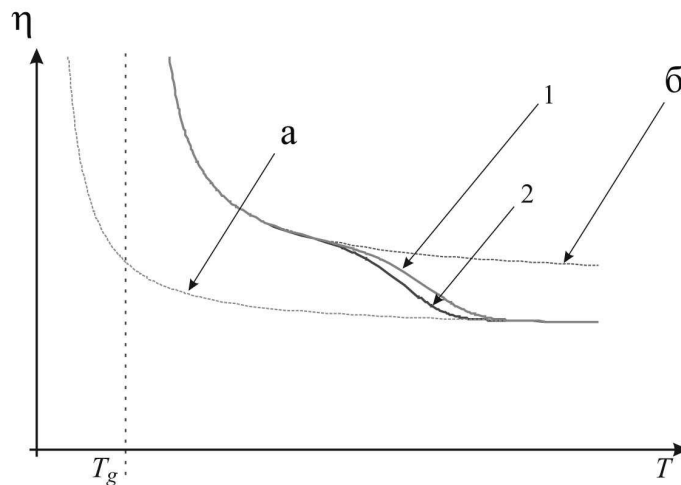


Рис. 2: Качественный вид температурной зависимости вязкости вязко-упругой жидкости вблизи перехода жидкость–стекло. (а) Ньютоновская модель, описывающая термически активируемые процессы, $\eta_0 \sim \exp(\text{const}/T)$, (б) вязкость вязкой жидкости, стремящаяся к ∞ при $T \rightarrow T_g$, (1) и (2) кроссовер от а-режима к б-режиму, соответствующий процессу слабого гелеобразования ($\hat{t}_1 < \hat{t}_2$). Изображённый эффект также называется “термическим гелеобразованием”.

Третья глава. Несмотря на значительные успехи в развитии описания

динамики стеклования, достигнутые, к примеру, в теории связанных мод, привлекательной но нереализованной остаётся идея описания стекольного перехода в рамках флуктуационной теории фазовых переходов. Попытки применения этой теории к системам с беспорядком привели к серьёзным трудностям [4], связанным с необходимостью статистического усреднения квази-неэргодических систем, что потребовало выхода за рамки обычных представлений и методов. В **третьей главе** эта задача решается с помощью функционального метода неравновесной динамики, в котором кази-неэргодичность системы учитывается с помощью введения иерархического спектра времён релаксации.

Рассматривается мягкая модель спинового стекла Эдвардса-Андерсона [1], в которой учитывается ультраметрическая иерархия времён релаксации, задаваемая на микроскопическом уровне явным образом. Модель представляется в следующем виде:

$$H_\alpha = - \sum_{ik} J_{\alpha ik} m_{\alpha i} m_{\alpha k} + \sum_i U(m_{\alpha i}), \quad U(m) = \frac{\mu^2 m^2}{2} + \frac{um^4}{4}, \quad (7)$$

$$\langle J_{ik} \rangle = 0, \quad \langle J_{\alpha ik}(t) J_{\beta ik}(t') \rangle = \delta_{ik} \theta(|t - t'| - \tau_{\alpha\beta}),$$

где α — индекс, показывающий в какой долине локализована система, и $\mu^2 = \kappa(T - T_g)/T_g$. Множество случайных взаимодействий J рассматривается как поле, а динамическая неоднородность неравновесной системы учитывается с помощью наложения дополнительного условия на это поле J : Полагается, что в некоторый начальный момент времени, когда состояния в двух различных долинах, например, α и β , не связаны между собой, усреднение по случайным реализациям поля J производятся независимо для каждой долины, поэтому нет корреляции между J_α и J_β . Однако, по истечении некоторого времени $\tau_{\alpha\beta}$, необходимого для того чтобы долины пришли к равновесию, их состояния перестают быть независимыми, и усреднение по J становятся общим. Таким образом, коррелятор $\langle J_\alpha(t) J_\beta(t') \rangle = 0$, если время меньше некоторого характерного масштаба $\tau_{\alpha\beta}$, и $\langle J_\alpha(t) J_\beta(t') \rangle = 1$ при

$|t - t'| > \tau_{\alpha\beta}$. Характерный масштаб времени τ_{ab} определяется расстоянием между долинами α и β в ультраметрическом пространстве, $x_{\alpha\beta}$. Без ограничения общности эта зависимость может быть выбрана в виде: $\tau_{\alpha\beta} \sim e^{\sigma x_{\alpha\beta}}$ [1], где σ — некоторый параметр ультраметрического пространства.

В келдышевском представлении действие рассматриваемой модели имеет вид:

$$Z = \int D\vec{m}DJ \exp[iS] = \int D\vec{m}DJ \exp[iS_m + iS_J + iS_{\text{int}}], \quad (8)$$

где $D\vec{m} = \prod_{\alpha} d\vec{m}_{\alpha}$, $\vec{m} = \{m^{(\text{cl})}, m^{(\text{q})}\}$ — параметр порядка, J — случайное внешнее поле,

$$iS_m = i\frac{1}{2} \int_t \vec{m}_{\alpha}^{\dagger}(t) G_{\alpha\beta}^{-1}(t-t') \vec{m}_{\beta}(t'), \quad iS_J = i\frac{1}{2} \int_{t,t'} J_{\alpha}^{\dagger}(t) D_{\alpha\beta}^{-1}(t,t') J_{\beta}(t'), \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} iS_{\text{int}} &= -i \int_t \sum_{\alpha} (H_{\alpha}[J, m^{\text{cl}} + m^{\text{q}}, t] - H_{\alpha}[J, m^{\text{cl}} - m^{\text{q}}, t]) = \\ &= -2i \int_t (2\rho J_{\alpha}(t) m_{\alpha}^{\text{cl}} m_{\alpha}^{\text{q}}) - iu \int_t m^{\text{cl}} m^{\text{q}} [(m^{\text{cl}})^2 + (m^{\text{q}})^2], \end{aligned} \quad (10)$$

где ρ — эффективный заряд, меняющийся в процессе перенормировки (без перенормировки $\rho \equiv 1$). В импульсном представлении корреляционные функции $G_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$G_{\alpha\beta}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{i2\Gamma T_{\alpha\beta}}{(\Gamma\omega)^2 + (k^2 + \mu^2)^2} & \frac{\delta_{\alpha\beta}}{i\Gamma\omega - k^2 - \mu^2} \\ \frac{\delta_{\alpha\beta}}{-i\Gamma\omega - k^2 - \mu^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

и

$$D_{\alpha\beta}(\omega) = \left[\pi i \delta(\omega) - i \frac{\sin(\omega\tau_{\alpha\beta})}{\omega} \right]. \quad (12)$$

Величина $T_{\alpha\beta}$ имеет смысл эффективной температуры, общей для долин α и β . Пропагатор $D_{\alpha\beta}$ состоит из двух частей:

$$D_{\alpha\beta}(\omega) = D_{\alpha\beta}^s(\omega) + D_{\alpha\beta}^f(\omega), \quad (13)$$

где

$$D_{\alpha\beta}^f(\omega) = -i \frac{2 \sin(\omega\tau_{\alpha\beta})}{\omega}, \quad (14)$$

это “быстрая” часть, а

$$D_{\alpha\beta}^s(\omega) = 2\pi i \delta(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} I_0 i \frac{2 \sin(\omega\tau)}{\omega}, \quad (15)$$

это “медленная” (стационарная) часть пропагатора. В равновесном случае все долины объединены, поэтому $\tau_{\alpha\beta} = 0$, и в (20) остаётся только стационарная часть. В этом случае перенормировка не нарушает флуктуационно-диссипативной теоремы.

Перенормировка производится в парамагнитной области, $T > T_g$. Наибольший интерес представляет ренормировка келдышевской части функции Грина, которая делает её недиагональной в пространстве долин. В однопетлевом приближении её ренормировка имеет графическое представление, приведённое на рис. 3 г. Присутствие θ -функции Хевисайда формально приводит

$$\begin{array}{ccc} \text{а)} & \text{б)} & \text{в)} \\ \text{---} + & \text{---} & \text{-----} \\ & & \\ \text{г)} & & \\ \text{---} \textcircled{R} \text{---} = \text{---} \textcircled{R} \text{---} + 2 \text{---} \textcircled{R} \text{---} + \dots \end{array}$$

Рис. 3: а) — пропагатор $\langle m^{(a)} m^{(cl)} \rangle$, б) — пропагатор $\langle m^{(a)} m^{(a)} \rangle$, в) — парная корреляционная функция полей J , г) — графическое представление перенормировки вершины $m^{(cl)} m^{(cl)}$. Волнистыми линиями обозначаются медленные, а прямыми — быстрые поля m .

к неавтономности уравнений ренормгруппы при $t \sim \tau_{\alpha\beta}$. Однако, в двух предельных случаях, $t \ll \tau_{\alpha\beta}$, и $t \gg \tau_{\alpha\beta}$, ренормгрупповые уравнения являются автономными, поэтому физическое решение можно получить сшивкой решений, соответствующих этим предельным случаям.

На временных масштабах $t \ll \tau_{\alpha\beta}$, когда долины α и β являются статистически независимыми друг от друга, $\langle J_\alpha J_\beta \rangle = 0$, ренормгрупповая система

уравнений рассматриваемой модели имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d \ln(\Gamma T_{\alpha\beta})}{d\xi} &= \frac{3u^2}{\pi^2}, & \frac{d \ln(\varrho)}{d\xi} &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{12u}{8\pi^2}, \\ \frac{d \ln(\mu^2)}{d\xi} &= 2 - \frac{12u}{8\pi^2}, & \frac{d \ln(u)}{d\xi} &= \varepsilon + \varrho^2 \frac{3}{8\pi^2} - u \frac{36}{8\pi^2},\end{aligned}\quad (16)$$

где $\xi = \ln(1/\Lambda)$, $\varepsilon = 4 - d$, и Λ — регуляризирующий параметр обрезания по импульсам. Можно также считать, исходя из (11), что $\Lambda^2 \sim \Omega/\omega_{\min}$, где $\Omega \gg 1/\tau_{\alpha\beta}$ — верхняя частота. Выразим ξ через частоты: $\xi = 2 \ln(\Omega\tau_{\alpha\beta})$. Тогда данная система уравнений справедлива в области $\xi \gtrsim 1$. Неавтономность общих уравнений не влияет на условие существования неподвижной точки ренормализационной группы. Кроме того, это условие не зависит от предельного случая и может быть представлено в виде системы:

$$\frac{d \ln(\varrho)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d \ln(u)}{d\xi} = 0, \quad (17)$$

из которой следует, что $\varrho^* = \sqrt{4\pi^2\varepsilon/3}$, $u^* = \varepsilon\pi^2/3$. В результате, характерное время релаксации долин α и β ($\alpha \neq \beta$) имеет вид

$$\bar{\tau} \propto \Gamma T_{\alpha\beta} \sim \exp\left(\left[\frac{u^2 3}{8\pi^2}\right] \xi\right). \quad (18)$$

Перенормировка $T_{\alpha\beta}(\bar{\tau})$ оказывается независимой от индексов, нумерующих долины, в рассматриваемой области времён $t \ll \tau_{\alpha\beta}$, так как долины в этом случае независимы.

На временных масштабах $t \gg \tau_{\alpha\beta}$, соответствующих случаю, когда долины α и β приходят в равновесие между собой, $\langle J_\alpha J_\beta \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, ренорм-групповое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d \ln(\Gamma T_{\alpha\beta})}{d\xi} &= \frac{\varrho^2}{8\pi^2} + \frac{3u^2}{\pi^2}, & \frac{d \ln(\varrho)}{d\xi} &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{12u}{8\pi^2}, \\ \frac{d \ln(\mu^2)}{d\xi} &= 2 - \frac{12u}{8\pi^2}, & \frac{d \ln(u)}{d\xi} &= \varepsilon + \varrho^2 \frac{3}{8\pi^2} - u \frac{36}{8\pi^2},\end{aligned}\quad (19)$$

где $\ln(\omega_{\min}\tau_{\alpha\beta}) \lesssim \xi \lesssim 1$. Используя условие существования неподвижной точки приходим к

$$\bar{\tau} = \Gamma T_{\alpha\beta} \sim \exp\left(\left[\frac{\varrho^2}{8\pi^2} + \frac{3u^2}{\pi^2}\right] \xi\right). \quad (20)$$

Для того, чтобы сшить полученные решения (11) и (20) нужно исследовать перенормировку в области $t \sim \tau_{\alpha\beta}$ и получить функцию сшивки, $S(\xi)$:

$$\frac{d \ln(\Gamma T_{\alpha\beta})}{d\xi} = \frac{\varrho^2}{8\pi^2} S(\xi) + \frac{3u^2}{\pi^2}, \quad (21)$$

где $\xi \sim 1$. Функция сшивки, принимающая значение 1 в случае больших временных масштабов, $\xi \rightarrow \infty$, и 0 в случае малых временных масштабов $\xi \rightarrow 0$, имеет вид: $S(\xi) = 1 - \Lambda^z = 1 - \exp(-z\xi)$, где $z \approx 2$ — динамический индекс [5, 6]. Поскольку вблизи перехода парамагнетик–стекло

$$\mu = \sqrt{\kappa(T - T_g)/T_g} = e^\xi, \quad (22)$$

температурная зависимость скорости релаксации имеет вид:

$$\bar{\tau} \sim \left(\frac{\kappa(T - T_g)}{T_g} \right)^{\left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{3} \right)} \cdot \exp \left(\frac{\varepsilon}{6z} \left(\frac{T_g}{\kappa(T - T_g)} \right)^{z/2} \right), \quad (23)$$

где $\varepsilon = 4 - d$ для d -мерной системы.

Полученная зависимость времени релаксации от температуры при $T \rightarrow T_g$ представляет собой соотношение Фогеля-Фулчера-Таммана, характерное для стеклюющихся систем. Это позволяет сделать вывод о принципиальной возможности описания стекольного перехода в рамках динамической флуктуационной теории фазовых переходов с учётом ультраметричности пространства состояний.

Четвёртая глава. Изложенное выше теоретическое описание замораживания квази-неэргодической системы имеет существенный недостаток в том, что обоснованность применения к рассмотренной неупорядоченной системе скейлинговой гипотезы можно поставить под сомнение. Это связано с неудачным выбором вектора локальной “намагниченности” в качестве параметра порядка. Такой параметр порядка не может быть использован для описания молекулярных и топологических стеклюющихся систем и плох для описания спиновых систем, поскольку при масштабном преобразовании неупорядоченной системы спинов стремится к нулю. Он может рассматриваться лишь

как некоторый формальный параметр не имеющий конкретного физического смысла. Целью **четвёртой главы** является определение такого параметра порядка неупорядоченной системы, который был бы пригоден для использования во флуктуационной теории. Для этого в работе используется идея Ривьера [7, 8], заключающаяся в том, чтобы описывать неупорядоченные спиновые и топологически неупорядоченные системы с помощью геометрических (топологических) дефектов — дисклинаций. В этом случае в качестве параметра порядка предлагается рассматривать локальный топологический дипольный момент дисклинационной подсистемы, который, как оказалось, сохраняет физический смысл и при масштабных преобразованиях.

Для математического описания системы дисклинаций в работе использовалась континуальная теория дефектов, базирующаяся на математическом аппарате физики калибровочных полей [9]. Этот подход предполагает фундаментальную роль дефектов и примесей в формировании свойств неупорядоченных молекулярных систем и основан на том, что точечные и линейные дефекты могут делать неупорядоченную структуру энергетически более предпочтительной по сравнению с кристаллической.

Наиболее простой лагранжиан, описывающий систему с упругими деформациями, имеет вид:

$$L_0 = \frac{1}{2}\rho_0\partial_4\chi_i\partial_4\chi_i - \frac{1}{8}[\lambda u_{\alpha\alpha}u_{\beta\beta} + 2\mu u_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}] , \quad (24)$$

где $\chi_i(\vec{r}, t)$ — поле упругих деформаций, λ и μ — постоянные Ламе, ρ_0 — массовая плотность вещества (которая для удобства считается постоянной), а $u_{ab} = \partial_a\chi^i\partial_b\chi^i - \delta_{ab}$ — компоненты относительной деформации. Согласно калибровочной теории дислокаций и дисклинаций [9], пластическую деформацию структуры вещества можно рассматривать как нарушение однородности действия группы вращений и трансляций $SO(3) \triangleright T(3)$. Для учёта нарушений однородности вводятся компенсирующие калибровочные поля $(A_a^\alpha$ и $\varphi_b^i)$ ¹ и

¹Греческие буквы α, β, \dots используются для обозначения индексов из набора прос-

производится переход от обычных производных к ковариантным

$$\partial_a \chi^i \rightarrow B_a^i = \partial_a \chi^i + \gamma_{\alpha j}^i A_a^\alpha \chi^j + \varphi_a^i, \quad (25)$$

где $\gamma_{\alpha j}^i$ — три порождающие матрицы полупростой группы $SO(3)$. После чего лагранжиан L_0 заменяется новым лагранжианом

$$L = L_0 + s_1 L_1 + s_2 L_2, \quad (26)$$

где s_1 и s_2 — свободные параметры теории, а первое слагаемое,

$$L_0 = \frac{1}{2} \rho_0 B_4^i B_4^i - \frac{1}{8} [\lambda E_{\alpha\alpha} E_{\beta\beta} + 2\mu E_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}], \quad \text{где } E_{\alpha\beta} = B_\alpha^i B_\beta^i - \delta_{\alpha\beta}, \quad (27)$$

описывает упругие свойства материала, второе слагаемое,

$$s_1 L_1 = -\frac{1}{2} s_1 D_{ab}^i k^{ac} k^{bd} D_{cd}^i, \quad (28)$$

описывает свойства поля дислокации, φ_a^i , в нём используются следующие обозначения:

$$D_{ab}^i = \partial_a \varphi_b^i - \partial_b \varphi_a^i + \gamma_{\alpha j}^i (A_a^\alpha \varphi_b^j - A_b^\alpha \varphi_a^j + F_{ab}^\alpha \chi^j), \quad (29)$$

$$F_{ab}^\alpha = \partial_a A_b^\alpha - \partial_b A_a^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha A_a^\beta A_b^\gamma,$$

где γ_α — порождающие матрицы, а $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — в общем случае структурные константы полупростой группы $SO(3)$ ($C_{\beta\gamma}^\alpha = \varepsilon_{\beta\gamma}^\alpha$). Третье слагаемое,

$$s_2 L_2 = -\frac{1}{2} s_2 C_{\alpha\beta} F_{ab}^\alpha g^{ac} g^{bd} F_{cd}^\beta \quad (g^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta}, \quad g^{ab} = 0 \text{ при } a \neq b), \quad (30)$$

описывает свойства поля дисклинации, A_a^α , представляющего собой поле Янга-Миллса.

В работе показано, что потенциал калибровочного поля, создаваемого клиновой дисклинацией единичной длины, dl_α , имеет вид²

$$A_k^\alpha = \varepsilon_{\alpha k j} x_j \frac{\nu}{r^3} dl_\alpha. \quad (31)$$

транственных компонент $\{\alpha\} = \{1, 2, 3\}$, а латинские буквы a, b, \dots для полного набора индексов, включающего в себя и временную компоненту X^4 $\{a\} = \{1, 2, 3, 4\}$

²Следует обратить внимание на то, что здесь нет свёртки по индексу α .

где ν — индекс Франка. Затем, на примере системы с политетраэдрической локальной упаковкой, показывается, что создаваемое в конденсированной системе дисклинационное калибровочное поле является абелевым, в отличие от неабелевого поля Янга-Миллса в $SO(3)$ -симметричной модели. Группа симметрии основного состояния икосаэдра, Y , имеет на группе симметрии изотропного 3-d пространства три орбиты, соответствующие дискретным поворотам относительно трёх *осей симметрии*. Именно эти дискретные подгруппы группы $SO(2)$, а не группа $SO(3)$, являются калибровочными группами³. Это позволяет значительно упростить вычисления, воспользовавшись аналогией с электродинамикой.

В рассматриваемой дисклинационной модели неупорядоченного конденсированного вещества особая роль отводится *топологическому дипольному моменту*. Причины этого становятся понятными при рассмотрении произвольной сети линейных топологических дефектов. Сеть дисклинаций может иметь сложную произвольную конфигурацию, поэтому задача теоретического описания такой систем очень сложна. Однако, эту задачу можно упростить. Для этого можно воспользоваться аналогией между теоретическим описанием линейных дефектов и электрических токов в электродинамике. Так же как и в электродинамике, тензорный потенциал произвольной системы замкнутых линейных дефектов (аналогами токов в электродинамике), заключённых в произвольном объёме V , характеризуется топологическим моментом $Q_a^i = \pi a^2 \nu (\delta_a^i - 3e^i e_a)$, имеет вид:

$$A_a^i = \frac{Q_a^i}{R^3} + \dots \quad (32)$$

Это является результатом самоэкранировки топологических зарядов, в результате которой свободная подсистема дисклинаций трансформируется таким образом, чтобы быть топологически нейтральной, т.е. чтобы значение

³Сам факт существования в конденсированной системе линейных дефектов говорит о том, что создаваемые ими поля — абелевы.

локальной суммы топологических зарядов стремились к нулю. В этом случае энергия системы минимизируется, так как объёмная плотность энергии прямолинейной дисклинации (топологического заряда), которая имеет вид $\sim 1/r$, спадает значительно медленнее, чем плотность энергии топологического момента $1/r^3$. Таким образом, основным параметром, характеризующим систему дисклинаций, является её топологический момент Q_a^i .

Из теории электричества известно, что энергия взаимодействия сложной сети токов может быть вычислена как энергия взаимодействия системы локальных магнитных моментов, создаваемых этими токами в элементарных ячейках, на которые можно условно разделить систему. Взаимодействие между такими моментами имеет вид взаимодействия между дисклинационными петлями, так как петля — простейшая конфигурация дефекта, обладающая топологическим моментом. Энергия упругого взаимодействия между двумя дисклинационными петлями \mathcal{O} и \mathcal{O}' радиуса a , расположение которых относительно друг от друга задаётся вектором \bar{r} , имеет вид

$$F = \frac{\mu}{2} \varepsilon_{\alpha\alpha l} x_l A_i^\alpha \varepsilon_{\gamma\alpha j} x'_j A_i'^\gamma = n_i n'_i \frac{\lambda (av)^2}{8} \oint_{\mathcal{O}} \oint_{\mathcal{O}'} \left(\int \frac{x_l x'_l}{|x|^3 |x'|^3} dV \right) dl_j dl'_j, \quad (33)$$

где $\bar{x} = \bar{x}' + \bar{r}$, λ — модуль сдвига. С помощью топологического момента можно переписать (33) в виде

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} Q_{il}(\vec{r}_\alpha) J_{ijkl}(\vec{r}_{\alpha\beta}) Q_{jk}(\vec{r}_\beta). \quad (34)$$

с взаимодействием

$$J_{lkij}(\vec{r}_{\alpha\beta}) \approx \lambda \frac{\delta_{ij}}{2|\vec{r}_{\alpha\beta}|^3} \left(\delta^{lk} - 3 \frac{r_\alpha^l r_\beta^k}{r_{ij}^2} \right). \quad (35)$$

Здесь важно, что взаимодействие дисклинационных петель является дальнедействующим.

Можно показать, что поле, создаваемое вихрем топологических моментов, аналогично исходному полю линейной дисклинации: суммарное поле, создаваемое топологическими моментами, расположенными на замкнутом контуре

вокруг вихря, будет

$$A_{ij} = \oint \frac{Q_{ij}}{R^3} dl = 2\varepsilon_{ilk} \int \partial_l \frac{r_k r_j}{r^2 R^3} dS = 2\varepsilon_{ijk} \int \frac{r_k}{r^2 R^3} dS = 2\pi\varepsilon_{ijk} \frac{r_k}{R^3}. \quad (36)$$

После интегрирования по r от 0 до R получаем:

$$A_{ij} \simeq 4\pi\varepsilon_{ijk} \frac{R_k}{R^3}. \quad (37)$$

Таким образом, в системе топологических моментов тоже могут возникать дисклинации, описываемые прежней моделью, но уже с большим масштабом. Это не удивительно, поскольку поля дефектов являются топологическими полями и определяются топологическими свойствами системы, которые не должны зависеть от масштаба. Такая иерархия топологических вихрей определяет скейлинговые свойства системы.

Системы с дальнедействующим взаимодействием могут быть переведены в стекловое состояние. Для того, чтобы описать стеклование в системе дисклинаций необходимо сделать логический скачок: известно, что системы с дальнедействующим взаимодействием являются фрустрированными [10]. Поскольку в рассматриваемой модели взаимодействие между топологическими моментами является дальнедействующим и знакопеременным, то можно ожидать, что описываемая ею система будет фрустрированной. Наиболее простым способом ввести в модель фрустрации является добавление случайного знакопеременного поля⁴. Тогда вблизи фазового перехода, T_g , действие системы можно представить в виде

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} Q_{il}(\vec{r}_\alpha) J_{ijkl}(\vec{r}_{\alpha\beta}) Q_{jk}(\vec{r}_\beta) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} Q_{il}(\vec{r}_\alpha) (-\nabla^2 + \mu^2) Q_{il}(\vec{r}_\alpha) + \frac{\gamma}{3} \sum_{\alpha} Q_{il}(\vec{r}_\alpha) Q_{lj}(\vec{r}_\alpha) Q_{ji}(\vec{r}_\alpha) + \frac{\nu}{4} \sum_{\alpha} Q_{il}(\vec{r}_\alpha) Q_{lj}(\vec{r}_\alpha) Q_{jk}(\vec{r}_\alpha) Q_{ki}(\vec{r}_\alpha), \quad (38)$$

где $\mu^2 = \kappa(T - T_g)/T_g$ (здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование). Обычный подход к описанию фрустрированной системы предполагает, что пространство состояний такой системы разбито на

⁴ Другой способ введения фрустраций, без логических скачков, предложен в пятой главе.

долины, разделённые между собой энергетическими барьерами со сложным рельефом. Опишем состояния, соответствующие каждой долине, функциями $Q_{ij}^a(\vec{r}, t)$, где a — номер долины, после чего будем исходить из стандартной задачи стохастической динамики и предположим, что состояния, соответствующие различным долинам, взаимодействуют между собой. Тогда, согласно теории взаимодействующих мод, обобщение задачи на случай системы полей $\{Q_{ij}^a(\vec{r}, t)\}$ имеет вид:

$$\sum_b \Gamma_{ab} \partial_t Q_{ij}^b(t, \vec{r}) = -\frac{\delta F\{Q\}}{\delta Q_{ij}^a(t, \vec{r})} + \zeta_{ij}^a(t, \vec{r}), \quad (39)$$

$$\langle \zeta_{ij}^a(t, \vec{r}) \zeta_{ij}^b(t', \vec{r}') \rangle = 2\Gamma_{ab} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \quad (40)$$

Здесь индексы a и b нумеруют долины, Γ_{ab} — кинетический коэффициент. Функционал $S\{Q\}$ содержит случайное поле J , посредством которого моделируется замороженный беспорядок, обусловленный наличием дисклинационных дефектов:

$$\begin{aligned} F\{Q\} = & \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' dt dt' Q_{il}^a(\vec{r}, t) ((\nabla^2 - \mu^2) \delta_{ij} \delta_{lk} \delta(\vec{r} - \vec{r}')) \delta(t - t') Q_{jk}^a(\vec{r}', t') + \\ & + \frac{\rho}{2} \int d\vec{r} dt Q_{ij}^a(\vec{r}, t) J^a(\vec{r}, t) Q_{ij}^a(\vec{r}, t) + \frac{\gamma}{3} \int d\vec{r} dt Q_{il}^a(\vec{r}, t) Q_{lj}^a(\vec{r}, t) Q_{ji}^a(\vec{r}, t) + \\ & + \frac{\nu}{4} \int d\vec{r} dt Q_{il}^a(\vec{r}, t) Q_{lj}^a(\vec{r}, t) Q_{jk}^a(\vec{r}, t) Q_{ki}^a(\vec{r}, t). \quad (41) \end{aligned}$$

Как и в предыдущей главе, коррелятор случайных взаимодействий представляется в виде θ -функции Хевисайда:

$$\langle J^a(t, \vec{r}) J^b(t', \vec{r}') \rangle = \theta(|t - t'| - \tau_{ab}) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (42)$$

Время релаксации τ_{ab} зависит от расстояния между долинами a и b в ультраметрическом пространстве x_{ab} : $\tau_{ab} = \tau_0 e^{x_{ab}}$.

Использование функциональных методов позволяет свести данную задачу к квантовополевой задаче с удвоенным количеством полей: $Q_{ij} \rightarrow \vec{Q}_{ij} = Q_{ij}, \bar{Q}_{ij}$ (Q_{ij} — “классическое” поле, \bar{Q}_{ij} — “квантовое” поле). “Затравочные”

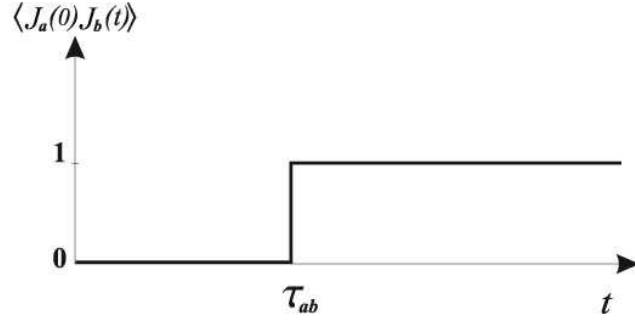


Рис. 4: Графическое представление коррелятора $\langle J^a(t)J^b(t') \rangle$.

корреляционные функции этих полей в симметричной форме имеют следующий вид (при $\Gamma_{aa} = \Gamma$):

$$\langle \bar{Q}_{ij}^a Q_{lk}^b \rangle = \delta_{ab} \frac{(\varepsilon_k + i\Gamma\omega)\delta_{jk}\delta_{il} + \lambda \frac{k_j k_k}{k^2} \delta_{il}}{(\varepsilon_k + i\Gamma\omega)(\lambda + \varepsilon_k + i\Gamma\omega)}, \quad \langle J^a J^b \rangle = \frac{e^{-i\omega\tau_{ab}}}{i\omega}, \quad (43)$$

$$\langle Q_{ij}^a Q_{lk}^b \rangle = 2\Gamma_{ab} \frac{4(\varepsilon_k^2 + \Gamma^2\omega^2)\delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jk}\lambda \frac{k_i k_l}{k^2} (\lambda + 2\varepsilon_k) + \lambda^2 \frac{k_i k_j k_l k_k}{k^4}}{(\varepsilon_k^2 + \Gamma^2\omega^2)((\lambda + \varepsilon_k)^2 + \Gamma^2\omega^2)}, \quad (44)$$

где $\varepsilon_k = k^2 + \mu^2$. Представим эти корреляционные функции в виде графов а, б и в, соответственно (рис. 5).

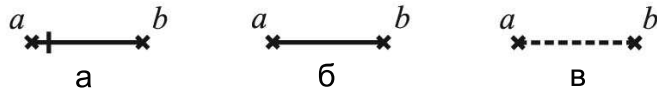


Рис. 5: Диаграммное представление корреляторов входящих в модель полей.

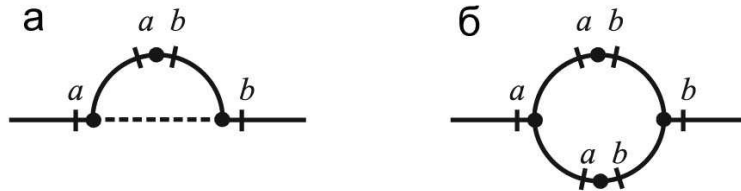


Рис. 6: Диаграммы, вносящие вклад в ренормировку вершины $\bar{\alpha}_{ab}$ (однопетлевое приближение).

Как и в случае модели Эдвардса–Андерсона перенормировка теории производится в парамагнитной области, $T > T_g$. Ренормгрупповой анализ, выполненный в однопетлевом приближении, показал принципиально важное значение в данной модели перенормировки келдышевской части функции Грина, которая делает её недиагональной в пространстве долин. В однопетлевом приближении её ренормировка имеет графическое представление, приведённое на рис. 6 а.

Процедура сшивки предельных решений, аналогичная процедуре, проведённой в третьей главе, приводит к следующему выражению для наблюдаемого времени релаксации системы:

$$t_{rel} \propto \exp \left(\frac{\varepsilon}{6z} \left(\frac{\kappa^{-1} T_g}{T - T_g} \right)^{z/2} \right), \quad (45)$$

где σ — величина, определяемая параметрами ультраметрического пространства. Таким образом, при $(T - T_g)/T_g \ll 1$ время релаксации рассмотренной системы удовлетворяет закону Фогеля–Фулчера–Таммана.

Полученное выражение для времени релаксации системы согласуется с основным результатом предыдущей главы и является ожидаемым, поскольку микроскопические детали модели, такие как диполь-дипольный характер взаимодействия, не должны влиять на критическое поведение модели. Однако, диполь-дипольный характер взаимодействия играет в данной модели важную роль, поскольку: во-первых, он делает теоретическую модель масштабно-инвариантной, что позволяет использовать методы флуктуационной теории фазовых переходов для описания замерзания неупорядоченных систем; во-вторых, он является причиной фрустрации системы, ведущей к ультраметричности пространства состояний, и таким образом определяет стекольную релаксационную динамику системы.

Предложенная техника описания замерзания квази-неэргодических систем строится на предположении о масштабно-временной неоднородности системы и существовании иерархии времён её релаксации, которая искус-

ственно вводится в модель с помощью наложения дополнительного ограничивающего условия на корреляционную функцию поля случайных связей. Можно предположить, что для самосогласованного вывода этой корреляционной функции в рамках самой теории необходимо исследовать влияние на динамику системы далекодействующих сил взаимодействия, наличие которых является причиной фрустрации.

Другим недостатком изложенной в четвёртой главе модели является необходимость логического скачка при переходе к случайным полям J . Можно избежать этого логического скачка и не задавать “руками” случайные взаимодействия в сети дисклинаций. Можно попытаться формализовать теорию представляя дисклинационную сеть случайным полем источников дисклинаций.

В **пятой главе** предложенная в предыдущих главах техника применяется для исследования калибровочной модели фрустрированного магнетика Гейзенберга. Благодаря использованию калибровочной модели, временная неоднородность возникает в теории естественным образом во время её перенормировки.

Согласно предложенной в работе теории, для осуществления стекольного перехода в конденсированной системе необходимо выполнение двух условий: 1) система должна находиться вблизи виртуального фазового перехода второго рода, T_c , при приближении к которому растёт характерный размер флуктуаций упорядоченной фазы; 2) система должна содержать структурные фрустрации, блокирующие рост этих флуктуаций. В качестве модельной системы в диссертационной работе была рассмотрена трёхмерная фрустрированная модель Гейзенберга. Способ введения фрустрирующего систему беспорядка играет в теории ключевую роль. Технически наиболее красивым способом введения фрустраций в систему является метод калибровочного поля [11, 12, 13, 7]. Действие системы вблизи виртуального фазового перехода

второго рода в общем виде может быть представлено как

$$S = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{s})^2 + U(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{r}, \quad (46)$$

где \mathbf{s} — параметр порядка (вектор локальной намагниченности), а $U(\mathbf{s}) = \mu^2 \mathbf{s}^2 + v \mathbf{s}^4$. Структура стеклующейся системы неоднородна относительно взаимной ориентации и абсолютных значений локальных намагниченностей. Эта неоднородность может быть описана с помощью компенсирующего калибровочного поля, A_μ^a , и замены обычной пространственной производной, $\partial_i \mathbf{s}$, на ковариантную производную, $D_i \mathbf{s}$, [13]:

$$\partial_i s^a \rightarrow D_i s^a = \partial_i s^a + g \varepsilon^{abc} A_i^b s^c. \quad (47)$$

Кроме того, действие модели должно содержать член $\sim (D_i A_\mu^a)^2$, поскольку предполагается, что поле A_μ^a непрерывно. При $\mu^2 > 0$ модель инвариантна относительно SO(3)-калибровочных преобразований и $\langle \mathbf{s} \rangle = 0$. Однако, при $\mu^2 < 0$ симметрия нарушается, поскольку система может “выбрать” только одно состояние из всех возможных состояний с минимумом энергии $U(\mathbf{s})$, расположенным на сфере $|\mathbf{s}| = i\mu/\sqrt{2v}$. Фиксируя точку на сфере мы фиксируем вакуум, в результате система остаётся инвариантной относительно преобразований SO(2) группы вращений вокруг выбранного направления. Раскладывая параметр порядка, \mathbf{s} , около выделенного вакуумного состояния, например, $\langle \mathbf{s} \rangle_0 = (0, 0, i\mu/\sqrt{2v})$, по малому отклонению $\phi = s - i\mu/\sqrt{2v}$, и используя калибровочные преобразования можно переписать действие (46) в виде функционала, содержащего два массивных векторных бозона, A_μ^κ ($\kappa = \{1, 2\}$), с массой $M_0 = ig\mu/\sqrt{2v}$, один безмассовый векторный бозон, A_μ^3 , и скалярное поле, ϕ :

$$S = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + 2\mu^2 \phi^2 + \frac{g^2 \mu^2}{4v} A_\mu^\kappa A_\mu^\kappa + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + v\phi^4 + \frac{g^2}{2} \phi^2 A_\mu^a A_\mu^a + J_\mu^a A_\mu^a \right] d\mathbf{r}. \quad (48)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (49)$$

где J_μ^a — источники калибровочного поля, представляющие собой дисклинации (вихри).

В отличие от [13] в качестве фрустрирующей структуру поля в диссертационной работе рассматривается не калибровочное поле, A_μ^a , а поле его источников, J_μ^a . Согласно идеям, заложенным в [7, 11, 12], предполагается, что при $T > T_c$ система дисклинаций подвижна и находится в тепловом равновесии. В этом случае усреднение статистической суммы по J_μ^a ,

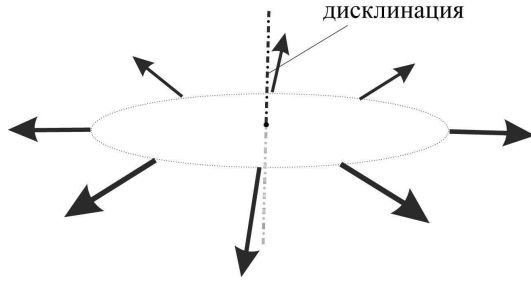


Рис. 7: Фрустрация делает спины неколлинеарными. В непрерывную модель фрустрацию можно ввести с помощью топологического дефекта – дисклинации, искривляющего пространство так, что локальная равновесная конфигурация спинов содержит полный поворот их направления при обходе по замкнутому контуру вокруг этой дисклинации. Наличие в системе таких дефектов вырождает её основное коллинеарное состояние.

$$Z = \int \left[\int \exp \left(-S - \frac{1}{4} \int I_0^{-1} J_\mu^{a2} d\mathbf{r} \right) D J_\mu^a \right] D\phi D A_\mu^a, \quad (50)$$

где I_0 — плотность дисклинаций, приводит к дополнительному вкладу в “массу” калибровочного поля:

$$M^2 = -I_0 + M_0^2 = -I_0 + \mu^2 g^2 / 4v. \quad (51)$$

Это влияет на критическое поведение системы, поскольку сингулярность $M^2 = 0$ сдвигается в область температур, находящуюся выше температуры

перехода парамагнетик-ферромагнетик, T_c . При $\mu^2 = \alpha k_B(T - T_c)$, где α — константа, а k_B — постоянная Больцмана, корреляционный радиус поля A_μ^a и время релаксации системы расходятся в $T_g = T_c + 4I_0 v / \alpha k_B g^2$. При этом корреляционный радиус поля намагниченности, ϕ , остаётся конечным. Таким образом, фрустрирующие структуру вихри ограничивают рост корреляционной длины параметра порядка, и система замерзает в неупорядоченном состоянии.

Исследование динамики рассматриваемой системы и её физических свойств около T_g ($k_B T_g = 1$) проводилось с помощью функциональной техники описания неравновесной динамики [3] и метода теоретического описания критической динамики квази-неэргодических систем, изложенного в предыдущих главах. Статистическая сумма системы была представлена в виде:

$$Z = \int \exp(-S^*) D\vec{\phi} D\vec{A}_\mu^a, \quad (52)$$

с эффективным действием

$$\begin{aligned} S^* = & \frac{1}{2} \int \left[\vec{\phi}(t, \mathbf{r}) \hat{G}^{-1}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \vec{\phi}(t', \mathbf{r}') + \right. \\ & \left. + \vec{A}_\mu^a(t, \mathbf{r}) \hat{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \vec{A}_\nu^a(t', \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r} d\mathbf{r}' dt dt' + \\ & + \int \left[g \varepsilon^{abc} (\partial_\mu \bar{A}_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c + g \varepsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) \bar{A}_\mu^b A_\nu^c + g \varepsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b \bar{A}_\nu^c + \right. \\ & \left. + g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{aij} \bar{A}_\mu^b A_\nu^c A_\mu^i A_\nu^j + g^2 \bar{A}_\mu^a A_\mu^a \phi^2 + g^2 (A_\mu^a)^2 \bar{\phi} \phi + v 4 \bar{\phi} \phi^3 \right] d\mathbf{r} dt, \end{aligned} \quad (53)$$

где $\vec{\phi} = \{\bar{\phi}, \phi\}$, и $\vec{A}_\mu^a = \{\bar{A}_\mu^a, A_\mu^a\}$ — векторы, компоненты которых именуется, соответственно, “квантовой” и “классической” [3]. G^{-1} и $\Delta_{\mu\nu}^{-1}$ матрицы, обратные соответствующим матрицам функций Грина, имеющих вид:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G^K & G^A \\ G^R & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Delta_{\mu\nu}^K & \Delta_{\mu\nu}^A \\ \Delta_{\mu\nu}^R & 0 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

где

$$G^{R(A)}(k, \omega) = \frac{1}{k^2 + \mu^2 \pm i\Gamma_\phi \omega}, \quad G^K(k, \omega) = \frac{2\Gamma_\phi}{(k^2 + \mu^2)^2 + \Gamma_\phi^2 \omega^2}, \quad (55)$$

Γ_ϕ — кинетический коэффициент поля параметра порядка, а

$$\Delta_{\mu\nu}^{R(A)}(k, \omega) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 \pm i\Gamma_A \omega}, \quad \Delta_{\mu\nu}^K(k, \omega) = \frac{2\Gamma_A \delta_{\mu\nu}}{k^4 + \Gamma_A^2 \omega^2}, \quad (56)$$

где Γ_A — кинетический коэффициент калибровочного поля.

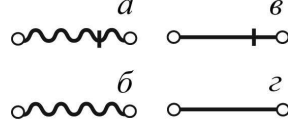


Рис. 8: а) $\Delta_{\mu\nu}^R$ — запаздывающая функция Грина поля $A_{\mu\nu}$; б) $\Delta_{\mu\nu}^K$ — келдышевская часть функции Грина поля $A_{\mu\nu}$; в) G^R — запаздывающая функция Грина поля ϕ ; г) G^K — келдышевская часть функции Грина поля ϕ .



Рис. 9:

Проведённый ренормгрупповой анализ, выполненный в однопетлевом приближении, показал принципиально важное значение в данной модели перенормировки кинетического коэффициента Γ_ϕ (рис. 9),

$$\Sigma \approx \frac{8g^2 I_0 v 4 \ln(1/\Lambda)}{8\pi^2} \int_0^{t_o} e^{-4I_0 v |t|/\Gamma_\phi g^2} dt = \Gamma_\phi \frac{8g^4 \ln(1/\Lambda)}{8\pi^2} (1 - e^{-4I_0 v |t_o|/\Gamma_\phi g^2}), \quad (57)$$

где Λ — параметр регуляризации методом обрезания импульсов. Именно этот вклад в перенормировку определяет кинетику стекольного перехода, поскольку зависит от масштаба времени наблюдения, t_o . Благодаря этому вкладу в задаче естественным образом появляется иерархия времён релаксации, вводимая ранее искусственно. Для решения задача делится на две предельные подзадачи с автономными ренормгруппами, соответствующие малым временным масштабам ($t_o \ll \Gamma_\phi g^2/4I_0 v$) и большим временным масштабам ($t_o \gg \Gamma_\phi g^2/4I_0 v$). Как и в предыдущих двух главах, независящее

от масштаба общее решение данной ренормгрупповой задачи представляется в виде сшивки двух решений, соответствующих предельным случаям. В результате удаётся показать, что вблизи T_g происходит критическое замедление системы, а температурная зависимость времени релаксации,

$$\tau_{rel} = \Gamma_\phi \propto \exp\left(\frac{vg^2T_g}{\alpha\pi^2(T - T_g)}\right), \quad (58)$$

представляет собой соотношение Фогеля-Фулчера-Таммана.

Важным признаком стекольного перехода является потеря эргодичности системы в точке перехода, которая приводит к нарушению условий выполнения флуктуационно-диссипативной теоремы [3]. Зависимость полученной ренормализационной группы от масштаба времени приводит к нарушению ФДТ,

$$G^K(\omega) = \frac{T}{i\omega} \{G^R(\omega) - G^A(\omega)\}, \quad (59)$$

на малых временных масштабах. На временах, превышающих $t^* = \Gamma_\phi g^2/4I_0v$, ФДТ выполняется. Таким образом, величина $\Gamma_\phi g^2/4I_0v$ является характерным масштабом временной неоднородности системы.

Оценка других физических свойств вблизи T_g также подтвердила предположение, что при данной температуре происходит стекольный переход. В частности, на это указывает поведение вычисленных магнитной восприимчивости, $\chi_L = \partial\langle\phi\rangle/\partial h \sim \mu^{-2} = g^2/4I_0v$ (h — внешний источник поля ϕ), и нелинейной магнитной восприимчивости [14], $\chi_N = \partial^3\langle\phi\rangle/\partial h^3 = \langle\phi^4\rangle$, представленных на рис. 10. Если χ_L имеет в T_g максимум, но остаётся конечным, то χ_N расходится как $\chi_N \propto 1/(T - T_g)^\gamma$ ($2.5 \lesssim \gamma < 3$), что характерно для стекольных переходов в спиновых системах [14]. Кроме того, был определён приближённый вид температурной зависимости теплоёмкости модели,

$$c_p(T) = \frac{dU}{dT} \approx -k_B \ln Z - \frac{k_B T}{Z} \frac{dZ}{dT} \propto \frac{T e^{-CT_g/(T-T_g)}}{(T - T_g)^3} [(C + 1)T_g - T], \quad (60)$$

где C — не зависящий от температуры параметр, на котором также можно видеть (рис. 10) свойственный для стеклюющихся систем конечный пик

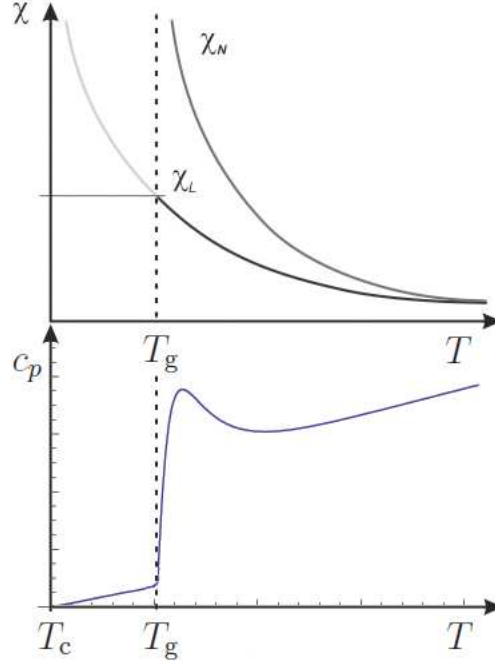


Рис. 10: Качественный вид функций, $\chi_N(T)$, $\chi_L(T)$, и $c_p(T)$.

теплоёмкости при $T \gtrsim T_g$, спадающий при приближении температуры к T_g .

В однопетлевом приближении был получен аналитический вид для корреляционной функции $G^K(t) = \langle \phi\phi \rangle_t$ вблизи T_G :

$$\langle \phi\phi \rangle_t \simeq G^K(t) + q \frac{4I_0 v}{g^2 \Gamma_\phi} \int_0^t G^K(t_1) e^{-4I_0 v |t-t_1| / \Gamma_\phi g^2} dt_1. \quad (61)$$

где $q = \langle \phi\phi \rangle_{k=0, t \rightarrow \infty}$. На рис. 11 приведён график вычисленной функции, который также имеет свойственный для стеклующихся систем характер. Первый пик соответствует первому слагаемому в (61) и объясняется высокотемпературными свойствами системы, не связанными с коллективными эффектами. Второй, широкий пик (или “плато”), соответствует кооперативным процессам, протекающим вследствие взаимодействия поля намагниченности с калибровочным полем.

В заключение было показано, что в рамках предложенной теории можно вывести уравнение теории связанных мод в представлении Цванцига-Мори [15]. Для этого была рассмотрена разность уравнений Дайсона для G^A и G^R ,

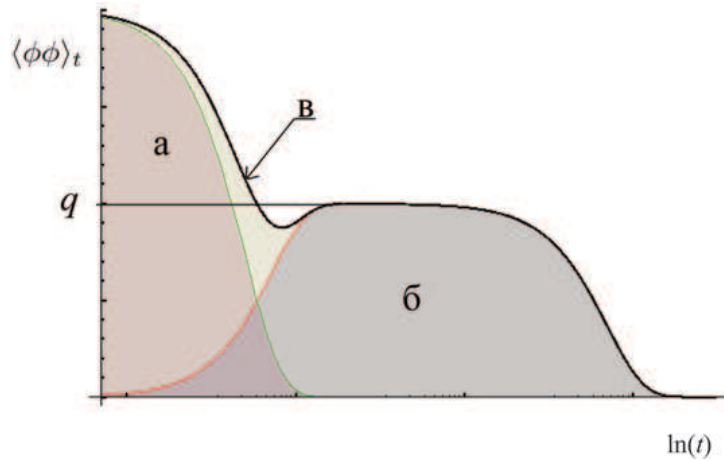


Рис. 11: Зависимость $\langle \phi \phi \rangle_t$ от $\ln(t)$: а) вклад от затравочной функции $G^K(t)$; б) вклад от кооперативных процессов; в) сумма первого и второго вкладов.

на которую слева действовал оператор $G_0^{-1} = \Gamma_\phi \partial_t - \nabla^2 + \mu^2$:

$$G_0^{-1}(G^R - G^A) = D^R \otimes G^R - D^A \otimes G^A, \quad (62)$$

где $D^{R(A)}$ — собственно-энергетическая часть, а символ \otimes обозначает свёртку по времени. Показано, что при условии выполнения ФДТ (59), выражение (62) представляет собой уравнение теории связанных мод:

$$\partial_t^2 G^K(t) + \mu^2 \partial_t G^K(t) + T \int_0^t D^R(|t'|) \partial_t G^K(t-t') dt' = 0. \quad (63)$$

Это важный результат, поскольку функция $D(t)$ является функцией памяти в уравнении теории связанных мод, и определение этой функции является ключевой проблемой теории. Предложенный выше подход позволяет непосредственно определять аналитический вид функции памяти, который зависит только от параметров микроскопической модели.

Таким образом, было показано, что предложенная калибровочная теория на качественном уровне согласуется с экспериментальными фактами, описывает известные физические свойства стекольных переходов, а так же согласуются с другими теориями стекольного перехода, такими, как теория

связанных мод [15] и теория ограниченного фрустрациями роста доменов [10].

Основные результаты

1. Предложен новый метод теоретического описания неравновесной динамики квази-неэргодических систем с помощью функциональных методов неравновесной динамики и априорного задания ступенчатой временной корреляционной функции случайных обменных интегралов, для учёта ультраметрической иерархии времён релаксации системы.
2. С помощью метода теоретического описания неравновесной динамики квази-неэргодических систем описана кинетика мягкой модели спинового стекла Эдвардса-Андерсона вблизи критической точки. Показано, что кинетика релаксации рассмотренной системы удовлетворяет закону Фогеля-Фулчера-Таммана.
3. Предложен новый теоретический подход к описанию стекольного перехода во фрустрированной конденсированной системе, в котором фрустрации рассматриваются в качестве источников калибровочного поля, описывающего пространственную неоднородность системы.
4. Исследована неравновесная динамика трёхмерной модели Гейзенберга со свободными случайными фрустрациями вблизи точки фазового перехода T_c . Показано, что при $T_g > T_c$, вследствие взаимодействия поля параметра порядка с калибровочным полем, происходит критическое замедление роста флуктуаций поля параметра порядка, приводящее к замораживанию структуры в макроскопически неупорядоченном стеклоподобном состоянии.
5. Показано, что кинетика релаксации фрустрированной модели Гейзенберга вблизи стекольного перехода, T_g , удовлетворяет закону Фогеля-

Фулчера-Таммана, линейная восприимчивость остаётся конечной, а нелинейная восприимчивость расходится по степенному закону с показателем γ , величина которого, $2.5 \leq \gamma < 3$, согласуется с экспериментальными данными.

6. Получен характерный для стекольных переходов аналитический вид зависимости корреляционной функции параметра порядка от температуры. Показано, что появление на этой зависимости плато происходит в результате суперпозиции вклада от свободного поля параметра порядка и “кооперативного” вклада от взаимодействия поля параметра порядка с калибровочным полем.
7. Показано, что уравнение теории связанных мод, в представлении Цванцига-Мори, описывающее динамику конденсированной системы вблизи стекольного перехода, может быть непосредственно получено из предложенной калибровочной теории стекольного перехода.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах (15 из них опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК):

1. Vasin M. G. Gauge theory of glass transition. // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2011. – P. P05009;
2. Ладьянов В. И., Меньшикова С. Г., Васин М. Г., Бельтюков А. Л., Маслов В. В. О немонотонных релаксационных процессах в неравновесных нанообразующих расплавах Al-ПМ-РЗМ. // Известия РАН. Серия физическая. – 2011. – Т. 75. – № 11. – С. 1423–1426;
3. Васин М. Г., Щелкачёв Н. М., Винокур В. М. Новый подход к описанию кинетики стеклования // Теоретическая и Математическая Физика. –

2010. – Т. 163. – № 1. – С. 163–176;
4. Васин М. Г. О некоторых деталях описания неупорядоченной конденсированной системы с помощью теории дефектных состояний ориентационного порядка. // Теоретическая и Математическая Физика. – 2009. – Т. 161. – № 2. – С. 267–277;
 5. Lad'yanov V. I., Bel'tyukov A. L., Shishmarin A. I., Vasin M. G., Maslov V. V., Nozenko V. K., Mashira V. A. Kinematical Viscosity of Glass-Forming Melts of System Fe-B-Si. // J. Non Cryst. Solids. – 2007. – V. 353. – P. 3264;
 6. Vasin M.G. General approach to the description of the glass transition in terms of critical dynamics // Phys. Rev. B. – 2006. – V. 74. – P. 214116;
 7. Vasin M.G. Description of glass transition in terms of critical dynamics // Condensed Matter at the Leading Edge, editor - Das M.P. New-York, Nova Science Publishers, 2006, pp. 147–163, ISBN: 1-60021-022-8;
 8. Васин М. Г. Описание перехода парамагнетик-спиновое стекло в модели Эдвардса-Андерсона методами критической динамики // Теоретическая и Математическая Физика. – 2006. – Т. 147. – № 2. С. 328–336;
 9. Васин М. Г. Ренормгрупповой подход к описанию перехода жидкость–стекло в дисклинационной модели жидкости // Вестник УдГУ. – 2006. – № 4. – С. 41–58;
 10. Васин М. Г., Стекольников В. А., Ладьянов В. И. Полиморфные переходы в однокомпонентных жидкостях: часть II. Теоретическое описание // Вестник УдГУ. – 2006. – № 4. – С. 93–114;
 11. Ладьянов В. И., Камаева Л. В., Васин М. Г., Корепанов А. Ю. О вязкости расплавов Ni-P в области малых концентраций фосфора // Расплавы. – 2006. – № 4. – С. 13–20;

12. Vasin M. G., and Lady'anov V. I. Description of Fisher clusters formation in supercooled liquids within framework of continual theory of defects // *J. Phys.: Condensed Matter*. – 2005. – V. 17. – P. S1287–S1292;
13. Васин М. Г., Ладьянов В. И. Полиморфные переходы в однокомпонентных жидкостях: Часть I. Экспериментальные данные // *Вестник УдГУ*. – 2005. – № 4. – С. 99–116;
14. Киммель А. В., Васин М. Г., Гусенков И. Н., Ладьянов В. И. Молекулярно-динамическое моделирование структурных и динамических свойств жидкой меди // *Вестник ИжГТУ*. – 2004. – № 4. С. 6–10;
15. Vasin M. G., Lad'yanov V. I. Structural transitions and non-monotonic relaxation processes in liquid metals // *Phys. Rev. E*. – 2003. – V. 68. – P. 5120;
16. Ладьянов В. И., Бельтюков А. Л., Камаева Л. В., Тронин К. Г., Васин М. Г. О структурном переходе и временной нестабильности в жидком кобальте // *Расплавы*. – 2003. – № 1. – С. 32–39;
17. Lad'yanov V. I., Vasin M. G., Logunov S. V., Bovin V. P. Nonmonotonic relaxation processes in nonequilibrium metal liquids // *Phys. Rev. B*. – 2000. – V. 62. – P. 12107–12112;
18. Васин М. Г., Ладьянов В. И., Бовин В. П. О механизме немонотонных релаксационных процессов в металлических расплавах // *Металлы*. – 2000. – № 5. – С. 27–32;
19. Васин М. Г., Ладьянов В. И., Бовин В. П. Статистическое моделирование процессов релаксации в расплавах с двумя конкурирующими типами ближнего порядка // *Расплавы*. – 1999. – № 3. С. 89–94.

Список литературы

- [1] Гинзбург С. Л. Необратимые явления в спиновых стёклах — М.: Наука, 1989, — 152 с. ISBN 5-02-014156-9;
- [2] Доценко В. С. Физика спин-стекольного состояния // УФН, Т. 163, № 6, 1993. с. 1–37;
- [3] Kamenev A. in *Nanophysics: Coherence and Transport*, edited by H. Bouchiat, *et al* — Elsevier, Amsterdam, 2005;
- [4] Доценко В. С. Критические явления в спиновых системах с беспорядком // УФН. — 1995. — Т. 165, — № 5, — С. 481–528;
- [5] Васильев М. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике — Издательство ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998. — 774 с. ISBN 5-86763-122-2;
- [6] Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов — М.: Наука, 1982. — 382 с.;
- [7] Rivier N., Duffy D.M. Line defects and tunneling modes in glasses // *J. Physique*. — 1982. — V. 43. — P. 295–306;
- [8] Nelson D.R. Order frustration and defects in liquids and glasses // *Phys. Rev. B*. — 1983. — V. 28. — P. 5515–5535;
- [9] Kadic A., Edelen D. G.B. A gauge theory of dislocations and disclinations — Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1983;
- [10] Kivelson D., Tarjus G. Observed Anomalies in Supercooled Liquids described by Frustration-Limited Domain Theory // *Phyl. Mag. B*. — 1998. — V. 77. — P. 245–256;

- [11] Воловик Г. Е., Дзялошинский И. Е. О дополнительных локализованных степенях свободы в спиновых стеклах // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 75. – № 3. С. 1102–1109;
- [12] Dzyaloshinskii I. E., Volovik G. E. On the concept of local invariance in the theory of spin glasses // J. Physique. – 1978. – V. 39. – P. 693–700;
- [13] Hertz J. A. Gauge models for spin-glasses // Phys. Rev. B. – 1978. – V. 18. – P. 4875–4885;
- [14] Binder K., Young A. P. Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions // Reviews of Modern Physics. – 1986. – V. 58. – № 4. – P. 801–976;
- [15] Kob W. / The Mode-Coupling Theory of the Glass Transition // Experimental and Theoretical Approaches to Supercooled Liquids: Advances and Novel Applications Eds.: J. Fourkas, D. Kivelson, U. Mohanty, and K. Nelson (ACS Books, Washington. – 1997.